

# Controllori Standard PID

---

di Cesare Fantuzzi

Dipartimento di Ingegneria, Università di Ferrara

Versione 1.2, 27 Maggio, 1997

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione.</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Struttura di base di un regolatore PID</b>	<b>6</b>
2.1	Termine proporzionale (P) . . . . .	6
2.2	Termine integrale (I) . . . . .	8
2.3	Termine derivativo (D). . . . .	9
2.4	Esercizi. . . . .	10
<b>3</b>	<b>Modifiche alla struttura di base</b>	<b>11</b>
3.1	Implementazioni alternative . . . . .	11
3.2	Limitazione di banda del termine derivativo . . . . .	12
3.3	“Pesatura” del riferimento. . . . .	13
3.4	“Anti-Windup” del termine integrale. . . . .	14
3.5	Esercizi. . . . .	16
<b>4</b>	<b>Modelli di processi dinamici</b>	<b>20</b>
4.1	Il problema della identificazione . . . . .	20
4.2	Metodo della risposta al gradino. . . . .	21
4.3	Esercizi. . . . .	24
<b>5</b>	<b>Progetto di controllori PID</b>	<b>27</b>
5.1	Specifiche di progetto . . . . .	27
5.2	Metodi di Ziegler-Nichols . . . . .	28
5.3	Metodi analitici di tuning. . . . .	30
5.4	Esercizi . . . . .	32

# Elenco delle figure

1.1	Sistema di controllo . . . . .	5
2.1	Sistema di controllo con carico e rumore . . . . .	7
2.2	Implementazione di un regolatore PI . . . . .	9
2.3	Stima dell'errore calcolata come estrapolazione lineare. . . . .	9
3.1	PID in forma serie . . . . .	11
3.2	PID con limitazione di banda . . . . .	13
3.3	Limitazione sull'attuatore . . . . .	14
3.4	Saturazione dell'integrale . . . . .	15
3.5	Schema di antisaturazione . . . . .	17
3.6	Integrazione condizionata . . . . .	18
3.7	Schema con anti-saturazione dell'integrale . . . . .	19
4.1	Schema della risposta al gradino . . . . .	21
4.2	Esempi di risposte al gradino . . . . .	25
4.3	Modello a due parametri . . . . .	26
4.4	Determinazione dei parametri $d$ e $T_p$ . . . . .	26
5.1	Ingresso a gradino . . . . .	28
5.2	Specifiche sull'inseguimento di un riferimento . . . . .	29
5.3	Sistema chiuso in retroazione unitaria. . . . .	30

# Elenco delle tabelle

- 5.1 Metodo di Ziegler-Nicols (risposta al gradino) . . . . . 29
- 5.2 Metodo di Ziegler-Nicols (frequenza caratteristica) . . . . . 29
- 5.3 Specifiche di progetto e poli della f.d.t. . . . . 31
- 5.4 Assegnamento dei poli per un sistema del secondo ordine. . . . . 33

# Capitolo 1

## Introduzione.

Lo schema del controllo in retroazione 1.1 è comunemente usato nelle applicazioni industriali della teoria del controllo automatico. L'obiettivo dello schema consiste nel forzare la *variabile controllata*  $y(t)$  (l'uscita di un certo sistema da controllare) a seguire il più fedelmente possibile una *variabile di riferimento*  $r(t)$  definita da un generatore di riferimento.

Il sistema di controllo viene progettato per raggiungere questa specifica tenendo conto di un modello matematico del sistema e dell'attuatore, vale a dire dal sistema di potenza che trasforma il *segnale di controllo*  $v(t)$  generato dal controllore in un *segnale di potenza*  $u(t)$  in grado agire sul sistema da controllare.

Il sistema di controllo acquisisce la misura della variabile da controllare tramite un sensore che fornisce una variabile di misura  $\tilde{y}(t)$  proporzionale alla variabile misurata  $y(t)$ , quindi confronta tale valore con il riferimento  $r(t)$ , ottenendo una variabile errore  $e(t)$ . La variabile errore viene infine elaborata dal controllore per calcolare un opportuno valore per il segnale di controllo  $v(t)$ .

Nelle applicazioni industriali sono spesso usati controllori con una struttura fissa costituita da un termine proporzionale (P), un termine integrale (I) e uno derivativo (D). Tali controllori, detti regolatori standard o PID, sono particolarmente apprezzati per la loro semplicità ed efficacia. In questi appunti verrà presentata e discussa la struttura di base di questi regolatori, mostrando metodi analitici di sintesi e affinamenti della struttura di base necessari nelle applicazioni pratiche.

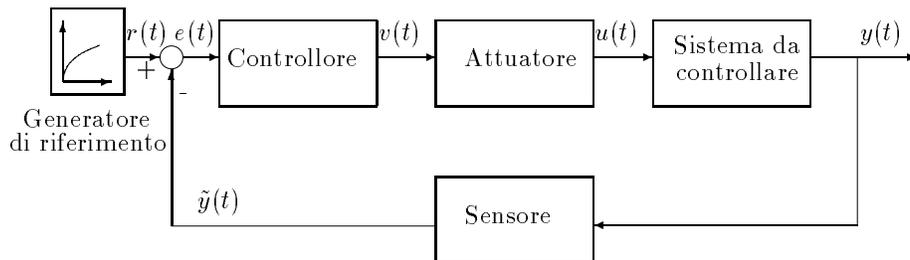


Figura 1.1: Diagrammi a blocchi di un sistema di controllo.

Nel corso della trattazione lo schema di controllo in retroazione 1.1 potrà essere considerato in forma semplificata per favorire la comprensione dei concetti esposti. In particolare potrà essere trascurata la presenza dell'attuatore ( $v(t) = u(t)$ ), ovvero trascurata la presenza del sensore ( $\tilde{y}(t) = y(t)$ ).

### Ringraziamenti

Ringrazio l'ing. Silvio Simani per l'insostituibile aiuto fornitomi nella stesura di questi appunti.

## Capitolo 2

# Struttura di base di un regolatore PID

Il regolatore PID è un sistema dinamico che elabora il segnale di ingresso errore come differenza fra il riferimento e la variabile controllata  $e(t) = r(t) - y(t)$  per ottenere un segnale di controllo  $u(t)$  fornito in ingresso al sistema da controllare.

Il regolatore PID nella sua forma base, ha una struttura fissa ed è parametrizzabile tramite tre parametri  $K, T_i, T_d$ :

$$u(t) = K \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (2.1)$$

Analizziamo separatamente nel seguito il significato di questi tre termini:

### 2.1 Termine proporzionale (P).

Nel caso in cui si utilizzi solo il termine proporzionale (es.  $1/T_i = 0, T_d = 0$ ), l'Equazione (2.1) si riduce a:

$$u(t) = K e(t) \quad (2.2)$$

Per comprendere al meglio il significato di questo termine analizziamolo separatamente dal punto di vista statico e dinamico.

#### Analisi statica

L'analisi statica dell'errore a regime può venire condotta utilizzando il teorema del valore finale. In estrema sintesi è possibile affermare che se il sistema da controllare non ha un comportamento "integrale" allora non è possibile annullare l'errore a regime dell'uscita del sistema controllato tramite il controllore descritto dalla (2.2).

Volendo annullare l'errore a regime occorre inserire un termine di *compensazione*  $u_b$  (bias), ottenendo:

$$u(t) = K e(t) + u_b \quad (2.3)$$

dove il termine di bias può essere calcolato nel caso di ingresso a gradino come:

$$u_b = \frac{r_0}{K_p} \quad (2.4)$$

dove  $r_0$  è l'ampiezza del gradino e  $K_p$  è la *costante di errore di posizione* del sistema sollecitato da un ingresso a gradino.

Nelle applicazioni pratiche lo schema di principio 1.1 deve essere complicato per tenere conto della applicazione di un disturbo al sistema controllato e della presenza di rumore sui sensori utilizzati per acquisire il valore della variabile controllata.

Ad esempio se il sistema da controllare è il motore di un ascensore di cui si vuole controllare la posizione, il disturbo agente sul sistema consiste nel peso delle persone a bordo dell'ascensore, supposto incognito e variabile a seconda delle condizioni, e il rumore consiste nel rumore elettromagnetico sovrapposto al segnale utile causato dalla non idealità dei sensori.

In base alle precedenti considerazioni modifichiamo lo schema 1.1 aggiungendo un termine di carico  $l(t)$  ed un termine di rumore sulla misura  $n(t)$  (vedi figura 2.1).

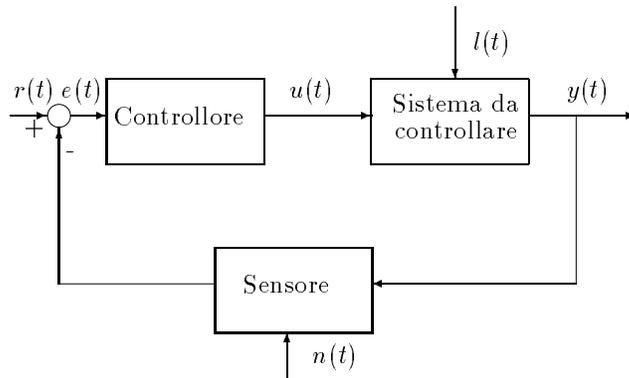


Figura 2.1: Diagrammi a blocchi di un sistema di controllo con applicazione di un disturbo esterno e rumore di misura.

Consideriamo un controllore di tipo proporzionale la cui legge di controllo è espressa dalla (2.3), e supponiamo che il sistema da controllare sia modellabile dalla relazione *statica*:

$$y(t) = K_p(u(t) + l(t)) \quad (2.5)$$

dove ancora  $K_p$  è il guadagno statico del sistema e  $y(t)$ ,  $u(t)$  e  $l(t)$  sono rispettivamente l'uscita, l'ingresso e il disturbo. Supponiamo poi che il rumore agente sul sensore sia di tipo additivo, per cui:

$$\tilde{y}(t) = y(t) + n(t) \quad (2.6)$$

dove  $\tilde{y}(t)$  e  $n(t)$  sono, rispettivamente, l'effettiva misura della variabile  $y(t)$  e il rumore introdotto dal sensore. La legge di controllo risulta quindi essere:

$$u(t) = K(r(t) - \tilde{y}(t)) + u_b \quad (2.7)$$

dove  $K$ ,  $u_b$  sono il coefficiente proporzionale ed il *bias* del controllore, mentre  $r(t)$  è il segnale di riferimento.

Effettuando alcuni semplici passaggi matematici si ottiene la relazione di *anello*:

$$y(t) = \frac{K K_p}{1 + K K_p}(r(t) - n(t)) + \frac{K_p}{1 + K K_p}(l(t) + u_b) \quad (2.8)$$

la quantità *adimensionale*  $K K_p$  viene chiamata anche *guadagno di anello*. Dalla precedente relazione si possono enunciare le seguenti osservazioni:

- Supponiamo inizialmente che  $n(t) = 0$  e che  $u_b = 0$ . Allora per avere un errore a regime basso occorre che il guadagno di anello sia elevato, vale a dire, siccome il guadagno statico del sistema  $K_p$  è fissato, che  $K$  sia elevato.
- Sempre nelle ipotesi precedenti, un guadagno di anello elevato riduce l'effetto del disturbo sulla variabile controllata.
- Consideriamo ora un rumore non nullo  $n(t) \neq 0$ . In tal caso il rumore agisce sulla variabile controllata allo stesso modo del riferimento. In altre parole, se il guadagno di anello è elevato, l'uscita del sistema tenderà ad inseguire fedelmente il segnale pari alla somma del riferimento e del rumore di misura.

Quindi un elevato guadagno di anello permette un buon inseguimento del riferimento, e quindi un errore a regime basso, nell'ipotesi, da verificare sul campo, che il rumore di misura sia trascurabile.

- Il termine di bias deve essere accuratamente calcolato per eliminare l'errore a regime (vedi equazione 2.4), in caso contrario ha un effetto sull'uscita del sistema pari al termine di disturbo.

## Analisi dinamica

L'introduzione di un termine proporzionale (P) nell'anello di controllo produce un incremento della larghezza di banda del sistema retroazionato, per cui si ha un *aumento* della velocità di risposta del sistema, e quindi una maggiore prontezza nell'inseguimento del riferimento, ma, allo stesso tempo, una *diminuzione* dei margini di stabilità del sistema.

Lo studio del comportamento dinamico dei sistemi controllati da un regolatore proporzionale può essere condotto mediante:

- *Utilizzo del criterio di Routh*. Applicando il criterio di Routh è possibile determinare il valore del termine  $K$  del controllore proporzionale in modo che il sistema in anello chiuso risulti stabile.
- *Luogo delle radici*. L'analisi condotta attraverso il luogo delle radici consente di determinare per quali valori del termine  $K$  il sistema assuma le caratteristiche dinamiche desiderate.

## 2.2 Termine integrale (I)

La funzione principale del termine integrale consiste nell'annullare l'errore a regime. Infatti tale termine integra l'errore nel tempo e quindi un errore costante provoca un incremento dell'azione di controllo fino a che l'errore non si è completamente annullato.

Per dimostrare questo fatto ammettiamo che esista un controllore proporzionale-integrale (PI) (vedi equazione 2.1) per cui si abbia un segnale di controllo costante  $u_0$  in presenza di errore costante  $e_0$ , per cui:

$$u_0 = K \left( e_0 + \frac{e_0}{T_i} t \right)$$

ma siccome per ipotesi  $e_0 \neq 0$ , il controllo  $u_0$  non può essere una costante.

Il termine integrale può essere visto come un dispositivo che automaticamente inizializza il valore della costante di *bias* di un controllore puramente proporzionale (vedi figura 2.2). In questo senso è possibile affermare che il termine integrale del controllore è uno *stimatore* dei disturbi  $l(t)$  che agiscono sul sistema da controllare.

Dal punto di vista *dinamico* l'introduzione del termine integrale porta ad un aumento del ritardo di fase della catena diretta di controllo pari a  $\pi/2$ , e quindi determina un peggioramento dei margini di fase ed ampiezza del sistema retroazionato.

In sostanza, quindi, l'introduzione del termine integrale porta benefici per quanto riguarda il comportamento a regime del sistema, però, di contro, può incidere sulla stabilità del sistema.

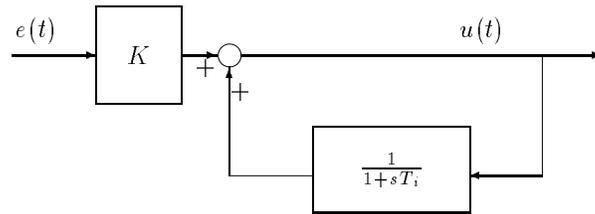


Figura 2.2: Implementazione di un regolatore PI. Svolgendo i calcoli è facile vedere che tale schema realizza l'equazione caratteristica di un regolatore PI (si veda l'equazione 2.1)

### 2.3 Termine derivativo (D).

La funzione principale del termine derivativo consiste nel migliorare i margini di stabilità del sistema fornendo un anticipo di fase all'anello di controllo in retroazione.

Per comprendere qualitativamente l'importanza dell'anticipo di fase, consideriamo un sistema in cui vi sia un forte ritardo di fase nell'azione in catena aperta. In tal caso una variazione della variabile di errore determina, attraverso il meccanismo di controllo in retroazione, una variazione della variabile controllata con un certo ritardo. Quindi, intuitivamente, è come se il controllore agisse "in ritardo" rispetto alle variazioni dell'errore.

L'azione derivativa ha lo scopo di introdurre un'azione che sia proporzionale alla variazione dell'errore, fornendo quindi una correzione che "anticipa" l'andamento dell'errore nel tempo.

La struttura di base di un regolatore PD (vedi anche la Formula 2.1) è:

$$u(t) = K \left( e(t) + T_d \frac{d e(t)}{dt} \right) \quad (2.9)$$

Considerando l'espansione in serie di Taylor dell'errore calcolato con un anticipo di  $T_d$ ,  $e(t + T_d)$ , otteniamo:

$$e(t + T_d) \approx e(t) + T_d \frac{d e(t)}{dt} \quad (2.10)$$

Quindi il segnale di controllo è proporzionale ad una stima dell'errore calcolata all'istante  $t + T_d$ , stima calcolata utilizzando una estrapolazione lineare (vedi Figura 2.3)

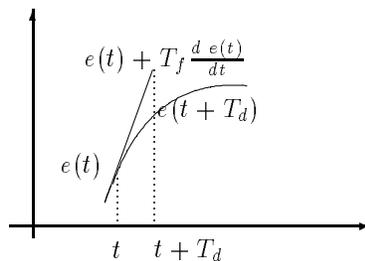


Figura 2.3: Stima dell'errore calcolata come estrapolazione lineare.

### Rumore sul segnale di errore.

Il termine derivativo ha la caratteristica di amplificare i segnali con contenuto armonico a frequenze elevate. Siccome in genere questo è il caso del rumore elettromagnetico sovrapposto al segnale utile,

l'utilizzo del termine derivativo deve essere valutato con cautela, eventualmente filtrando in maniera opportuna il segnale acquisito dai sensori.

## 2.4 Esercizi.

1. Utilizzando il teorema del valore finale, dimostrare la validità delle equazioni 2.3 e 2.4.
2. Scrivere la funzione di trasferimento del regolatore PID (Equazione 2.1)  $R(s)$ . Tale funzione di trasferimento è fisicamente realizzabile?
3. Determinare i poli e gli zeri di un controllore PID in funzione dei parametri  $T_i$  e  $T_d$ .
4. Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode e Nyquist per un controllore di tipo PID, individuando la pulsazione naturale del sistema  $\omega_n$ .
5. Si provi la correttezza della equazione 2.4 utilizzando il teorema del valore finale.
6. Considerando di voler controllare un sistema descrivibile dalla funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{K_p}{s + 1}$$

con un controllore proporzionale (P) chiuso in retroazione unitaria, si determini il valore di bias che annulla l'errore a regime nel caso in cui si applichi un riferimento a gradino di ampiezza unitaria.

# Capitolo 3

## Modifiche alla struttura di base

Nel capitolo 2 è stata introdotta la struttura di base del regolatore PID. Il regolatore PID utilizzato nelle applicazioni industriali ha una struttura più complessa in quanto vi sono problemi di natura pratica che non possono venire risolti utilizzando semplicemente la (2.1). In questo capitolo vedremo alcune riformulazioni della (2.1) utilizzate in applicazioni industriali e l'introduzione di un dispositivo di anti-saturazione del termine integrale nella legge di controllo.

### 3.1 Implementazioni alternative

Nelle applicazioni industriali vengono utilizzati diverse tipologie di controlli PID, anche se tutti condividono la presenza di una parte integrale, proporzionale e derivativa. Nel seguito verranno considerate le forme **Standard** o **ISA**, già introdotta nel capitolo precedente (Equazione 2.1), **Serie**, e **Parallela**. Le formule (3.1), (3.2), (3.3) mostrano la funzione di trasferimento  $R(s) = U(s)/E(s)$  dei PID nelle tre forme, dove  $U(s)$  e  $E(s)$  sono le trasformate di Laplace dei segnali  $u(t)$  e  $e(t)$ .

$$\text{Standard} \quad R(s) = K \left( 1 + \frac{1}{s T_i} + s T_d \right) \quad (3.1)$$

$$\text{Serie} \quad R'(s) = K' \left( 1 + \frac{1}{s T_i'} \right) (1 + s T_d') \quad (3.2)$$

$$\text{Parallela} \quad R''(s) = k + \frac{k_i}{s} + s k_d \quad (3.3)$$

#### Implementazione Serie $R'(s)$ .

Lo schema a blocchi della implementazione serie è raffigurato in Figura 3.1.

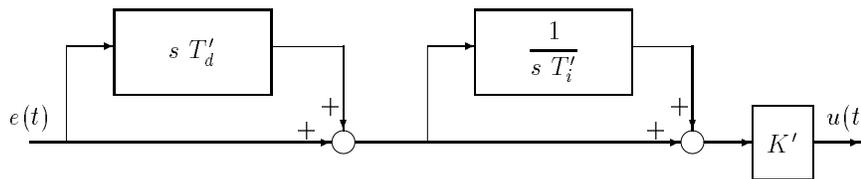


Figura 3.1: Schema a blocchi della implementazione serie.

A causa della struttura in cascata è evidente che il termine derivativo  $T'_d$  influenza la parte integrale del controllore. Per questo motivo questa forma viene anche chiamata *interagente*, all'opposto della forma standard, detta anche *non interagente*.

Tra i parametri delle rappresentazioni standard e serie è possibile stabilire le relazioni:

$$\begin{aligned} K &= K' \frac{T'_i + T'_d}{T'_i} \\ T_i &= T'_i + T'_d \\ T_d &= \frac{T'_i T'_d}{T'_i + T'_d} \end{aligned} \quad (3.4)$$

di controverso è possibile stabilire una relazione soltanto se  $T_i \geq 4T_d$ :

$$\begin{aligned} K' &= \frac{K}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - 4T_d/T_i} \right) \\ T'_i &= \frac{T_i}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - 4T_d/T_i} \right) \\ T_d &= \frac{T_i}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - 4T_d/T_i} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

### Implementazione parallela

La forma della implementazione parallela è molto simile alla forma standard. L'unica differenza consiste nella definizione dei parametri del PID. Le formule 3.6 mostrano le relazioni tra i parametri delle due forme.

$$\begin{aligned} k &= K \\ k_i &= \frac{K}{T_i} \\ k_d &= KT_d \end{aligned} \quad (3.6)$$

## 3.2 Limitazione di banda del termine derivativo

Il termine derivativo del regolatore PID migliora i margini di stabilità dell'anello di controllo ed introduce una azione di correzione dell'errore di tipo anticipativo. Dal punto di vista applicativo vi sono però alcuni importanti aspetti da valutare:

- Il termine derivativo amplifica i segnali a larga banda. Il rumore elettromagnetico sulla misura è in genere un segnale a larga banda, e quindi viene esaltato dall'azione derivativa del PID.
- La funzione di trasferimento corrispondente al termine derivativo del PID è non propria e quindi non fisicamente realizzabile. La sua diretta implementazione su dispositivi analogici può portare a risultati imprevisi, dovuti alle caratteristiche fisiche dei dispositivi utilizzati, non considerati in fase di progetto.
- Il contributo del termine derivativo diviene teoricamente infinito nel caso in cui venga applicato un ingresso di riferimento  $r(t)$  a gradino, introducendo sollecitazioni potenzialmente dannose per gli organi di attuazione.

Per capire meglio come il rumore di misura venga amplificato dal termine derivativo consideriamo un rumore approssimabile da un segnale sinusoidale  $n(t) = a \sin \omega t$ . Tale segnale fornisce il contributo all'uscita del PID:

$$u_n(t) = KT_d \frac{dn(t)}{dt} = aKT_d \omega \cos \omega t$$

quindi il contributo dovuto al rumore è in qualche modo dipendente dalla sua larghezza di banda.

Per risolvere i problemi citati è possibile filtrare con un sistema del primo ordine l'uscita del termine derivativo, sostituendo quindi tale contributo con un termine con funzione di trasferimento propria:

$$D(S) = \frac{sKT_d}{1 + sT_d/N} \quad (3.7)$$

dove la costante di tempo del filtro ( $T_d/N$ ) è solitamente fissata tra un decimo ed un ventesimo della costante di tempo del termine derivativo  $T_d$ .

Per evitare che segnali di riferimento a banda troppo larga, ad esempio un segnale a gradino, producano delle sollecitazioni troppo forti, è possibile modificare lo schema di base del PID (2.1) come mostrato in figura 3.2. In tale schema viene fornito all'ingresso del termine derivativo la sola misura dell'uscita  $y(t)$ .

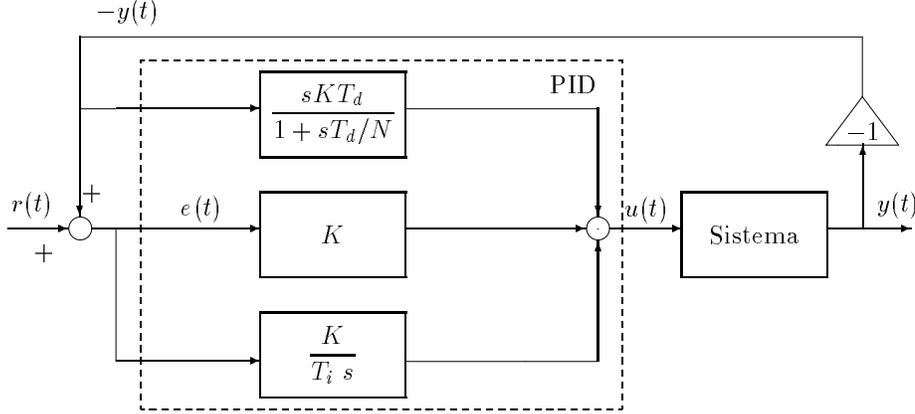


Figura 3.2: Schema a blocchi del PID con limitazione di banda del termine derivativo.

### 3.3 “Pesatura” del riferimento.

La struttura di controllo definita dalla relazione:

$$u(t) = K \left( b r(t) - y(t) + \frac{1}{T_s} \int_0^t \epsilon(\tau) d\tau + T_d \frac{d(c r(t) - y(t))}{dt} \right) \quad (3.8)$$

è una modifica alla struttura di base del PID standard (2.1) in cui sono stati introdotti i parametri  $b$  e  $c$  che moltiplicano il segnale di riferimento  $r(t)$ .

L'introduzione di tali parametri consente un ulteriore grado di libertà al progettista nella taratura del PID, in quanto è possibile modificare l'azione dell'ingresso di riferimento sul controllo calcolato dal PID. Ad esempio, ponendo  $b = 1$  e  $c = 0$  si ottiene la struttura mostrata in figura 3.2.

Combinando la relazione (3.8) con la (3.7), otteniamo:

$$u(s) = K \left( b r(s) - y(s) + \frac{1}{s T_s} e(s) + T_d \frac{s(c r(s) - y(s))}{1 + sT_d/N} \right) \quad (3.9)$$

che è la configurazione più generale utilizzata in ambito industriale del PID.

### 3.4 “Anti-Windup” del termine integrale.

Gran parte dello studio dei sistemi dinamici viene condotta utilizzando l'approssimazione di linearità del sistema in esame, sia pure in un certo intervallo di un punto di lavoro. Una delle principali cause di non linearità consiste nella limitazione fisica degli attuatori: la coppia fornita da un motore elettrico è limitata, una valvola non può essere più che completamente chiusa o completamente aperta.

Questo tipo di non-linearità può incidere profondamente sul comportamento del controllore PID. Infatti consideriamo lo schema 3.3,

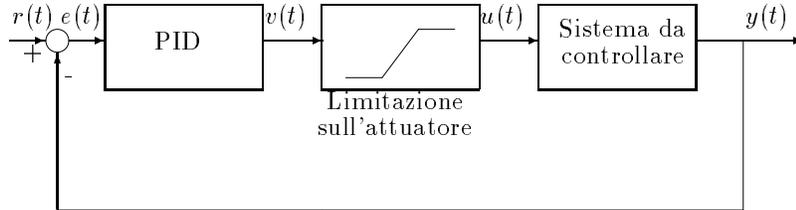


Figura 3.3: Schema a blocchi di un sistema di controllo con limitazione sull'attuatore.

A causa della saturazione dell'attuatore il valore in uscita dal regolatore PID ( $v(t)$ ) può essere differente dal valore della variabile di controllo ( $u(t)$ ). Vi può essere saturazione sul valore della variabile di controllo ovvero sulla sua derivata temporale. Tali saturazioni possono venire espresse dalle relazioni:

$$u(t) = \begin{cases} u^+; & \text{if } v(t) \geq u^+ \\ v(t); & \text{if } u^- < v(t) < u^+ \\ u^-; & \text{if } v(t) \leq u^- \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\frac{du(t)}{dt} = \begin{cases} d^+; & \text{if } \frac{dv(t)}{dt} \geq d^+ \\ \frac{dv(t)}{dt}; & \text{if } d^- < \frac{dv(t)}{dt} < d^+ \\ d^-; & \text{if } \frac{dv(t)}{dt} \leq d^- \end{cases} \quad (3.11)$$

dove  $u^-$ ,  $u^+$ ,  $d^-$  e  $d^+$  sono, rispettivamente, il limite minimo e massimo dell'uscita e della derivata temporale dell'uscita dell'attuatore.

Per capire come la saturazione dell'attuatore influisce sull'azione di controllo del sistema, consideriamo il seguente caso: supponiamo che il sistema si trovi in uno stato di equilibrio (errore nullo). Ad un certo istante viene applicato un gradino al segnale di riferimento  $r(t)$ , che sollecita il controllore a fornire un gradino al segnale di controllo  $v(t)$ . A causa della saturazione il segnale di attuazione  $u(t)$  è più basso di  $v(t)$  e quindi la variazione del segnale controllato, e quindi dell'errore, sarà inferiore rispetto al caso non limitato. A causa della ridotta velocità della decrescita del segnale di errore, il termine integrale aumenta molto di più rispetto al caso privo di limitazione. Quando poi l'errore tende ad annullarsi, il segnale di controllo rimane alto a causa dell'elevato valore dell'integrale, causando quindi una elevata sovraelongazione e un tempo di assestamento più elevato. Questo fenomeno viene chiamato *windup* del PID.

**Esempio 1.** Supponiamo di volere controllare il sistema  $G(s) = 1/s$  con un PI standard avente i parametri  $K = 1$  e  $T_i = 1$ . Il sistema in anello aperto ha come funzione di trasferimento:

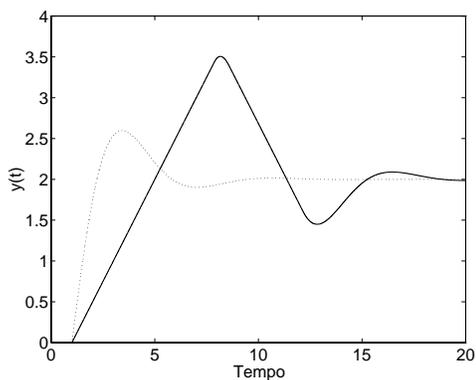
$$H(s) = \frac{s+1}{s^2}$$

mentre il sistema in anello chiuso ha come funzione di trasferimento:

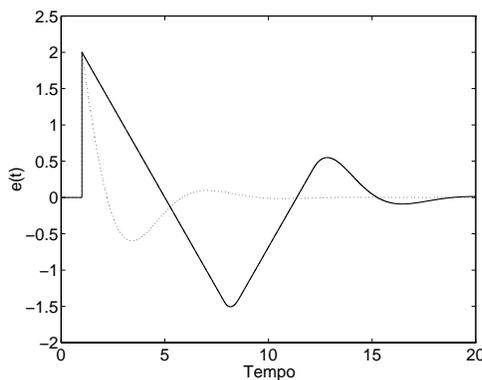
$$H_c(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$$

e quindi il sistema risulta asintoticamente stabile, avendo due poli a parte reale negativa:  $\lambda_{1,2} = -0.5 \pm i0.86$ .

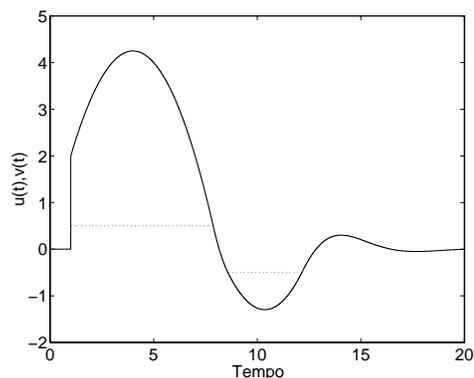
Supponiamo ora che l'attuatore del sistema di controllo saturi al valore  $u^+ = 0.5$  e  $u^- = -0.5$ . La non linearità introdotta dall'attuatore produce una saturazione esagerata del termine integrale del controllore, portando a oscillazioni accentuate della variabile controllata (si veda la figura 3.4).



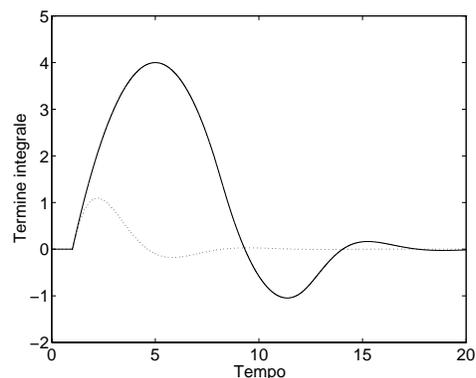
(a) Uscita del sistema nel caso di attuatore ideale (linea continua) e attuatore reale (linea tratteggiata).



(b) Errore di inseguimento nel caso di attuatore ideale (linea continua) e attuatore reale (linea tratteggiata).



(c) Azione di controllo:  $v(t)$  (linea continua) e  $u(t)$  (linea tratteggiata).



(d) Uscita del termine integrale nel caso di attuatore ideale (linea continua) e attuatore reale (linea tratteggiata).

Figura 3.4: Controllo di un sistema dinamico attraverso un attuatore saturante.

Nel seguito verranno mostrati alcuni schemi per attenuare il problema della saturazione del termine integrale (dispositivi di “anti wind-up”).

### Ricalcolo del termine integrale.

Questa tecnica introduce un termine di compensazione  $e_s(t) = v(t) - u(t)$  all'ingresso del termine integrale, con segno opposto a quello del segnale di errore  $e(t)$ . Il segnale di compensazione è

nullo fino a che l'uscita del PID non è saturata, mentre fornisce un'azione tendente a diminuire il termine integrale nel caso in cui l'uscita del PID si saturi. In figura 3.5 sono mostrati due schemi di antisaturazione: il primo utilizza una misura diretta della variabile di controllo  $u(t)$ , il secondo impiega una stima di  $u(t)$  ottenuta tramite un modello dell'attuatore.

Il segnale di compensazione del termine integrale viene filtrato da una funzione di trasferimento  $F(s)$  tramite cui è possibile modulare l'azione di desaturazione. Siccome il termine di compensazione entra in un integratore, solitamente la funzione di trasferimento filtro  $F(s)$  è semplicemente una costante  $1/T_a$ .

Per scegliere correttamente  $T_a$  occorre considerare che per  $T_a$  molto piccoli l'azione di desaturazione è molto veloce, però è anche facilmente soggetta all'azione di disturbi, se  $T_a$  è grande l'azione di desaturazione è lenta.

### Integrazione condizionata

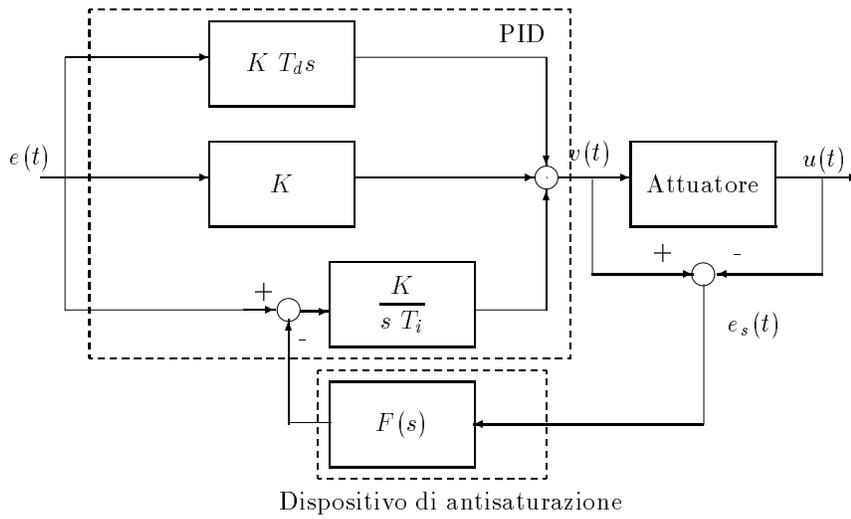
In questa tecnica l'ingresso del termine integrale viene azzerato nel caso in cui il segnale di compensazione  $e_s(t) = v(t) - u(t)$  sia non nullo (vedi figura 3.6). Se chiamiamo  $e_i(t)$  il valore di ingresso del termine integrale, allora l'integrazione condizionata si esprime matematicamente:

$$e_i(t) = \begin{cases} e(t), & \text{se } v(t) = u(t) \\ 0, & \text{se } v(t) \neq u(t) \end{cases} \quad (3.12)$$

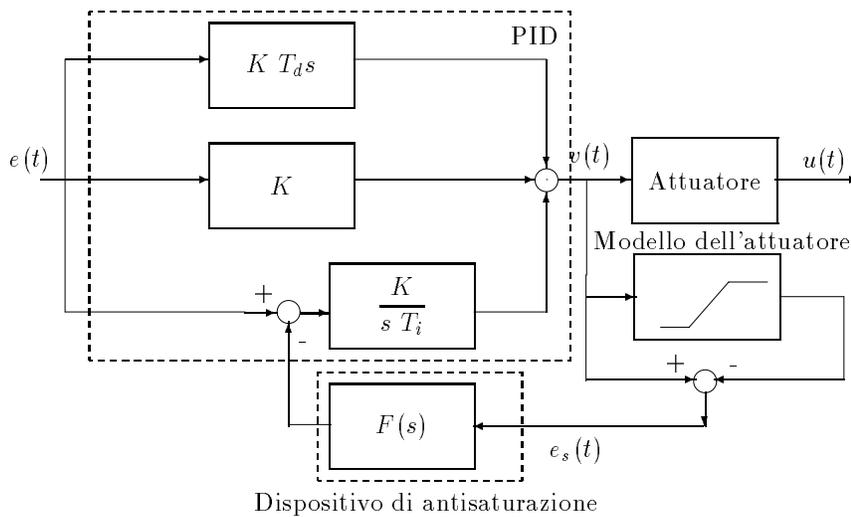
**Esempio 2.** Considerando ancora il caso dell'esempio 1, utilizziamo lo schema di integrazione condizionata per evitare il fenomeno di “wind up” dell'integratore. I risultati ottenuti sono mostrati in figura 3.7.

### 3.5 Esercizi.

1. Si calcolino gli zeri ed i poli della funzione di trasferimento del PID in forma serie.
2. È possibile modificare la dinamica di un sistema del secondo ordine avente due poli complessi coniugati tramite cancellazione polo zero con un PID nella forma serie?



(a) Schema con misura della variabile di attuazione.



(b) Schema con stima della variabile di attuazione.

Figura 3.5: Controllore PID con dispositivo di anti-saturazione del termine integrale mediante ricalcolo del termine integrale.

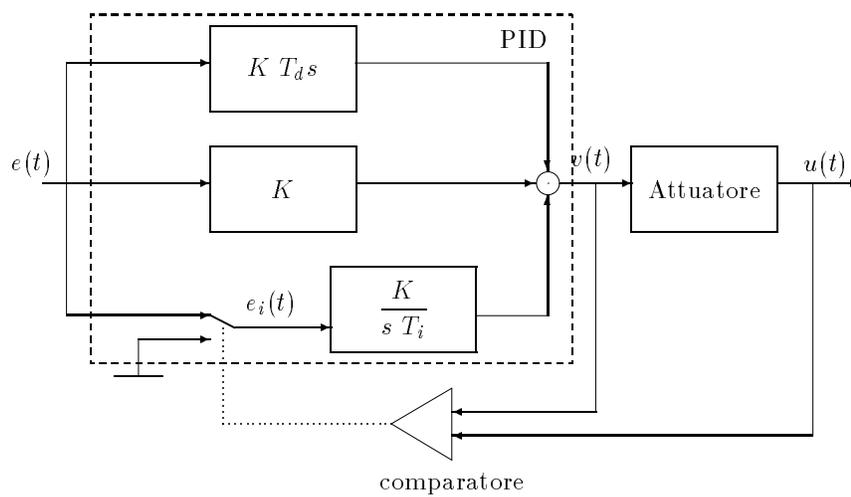
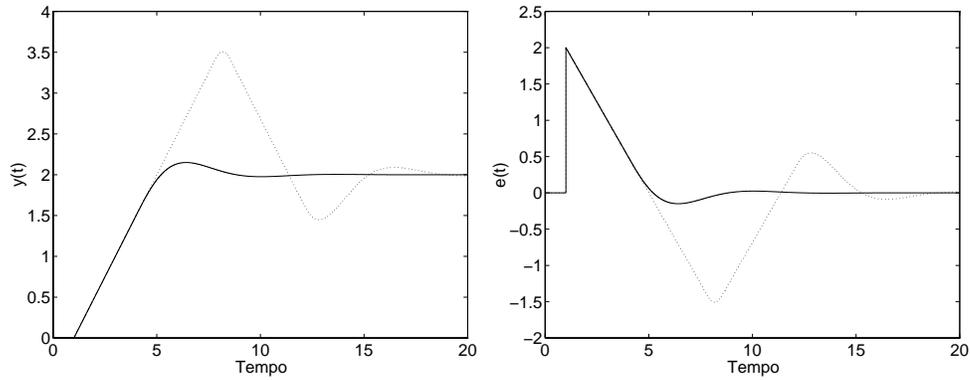
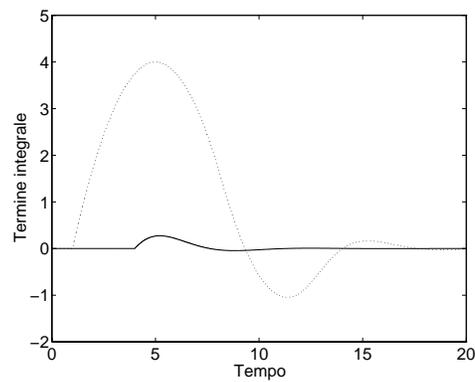


Figura 3.6: Schema di antisaturazione mediante integrazione condizionata.



(a) Uscita del sistema per un controllo con (linea continua) e senza dispositivo di antisaturazione (linea tratteggiata).

(b) Errore di inseguimento per un controllo con (linea continua) e senza dispositivo di antisaturazione (linea tratteggiata).



(c) Uscita del termine integrale per un controllo con (linea continua) e senza dispositivo di antisaturazione (linea tratteggiata).

Figura 3.7: Utilizzo di un controllore PID con dispositivo di anti-saturazione dell'integrale.

# Capitolo 4

## Modelli di processi dinamici

Per il progetto di un controllore è necessario conoscere un modello matematico del sistema da controllare. Il procedimento tramite cui è possibile ottenere un modello di un sistema dinamico prende il nome di *identificazione*.

In questo capitolo verranno presentati alcuni semplici metodi per ottenere un modello approssimato del sistema da controllare attraverso l'applicazione di segnali i "saggio", quali ingressi a gradino ed impulso.

### 4.1 Il problema della identificazione

L'identificazione di un sistema dinamico consiste nella determinazione di un modello matematico che descriva il comportamento del sistema mediante relazione matematiche. Tali relazioni sono in genere di tipo differenziale in quanto si ipotizza che il modello in questione abbia un comportamento dinamico.

La determinazione del modello passa attraverso le seguenti fasi:

- Acquisizione di tutte le possibili informazioni sul sistema fisico da modellare. Tali informazioni ci possono venire sia dalla conoscenza delle leggi fisiche che governano il sistema in esame, sia dalla misura delle variabili di ingresso ed uscita.
- Elaborazioni di tali informazioni per ottenere un modello matematico del sistema.

Dal punto di vista operativo, il procedimento di identificazione può essere classificato in due categorie:

- *A scatola nera*, in cui non si suppone nessuna conoscenza a priori del sistema fisico, e quindi non si fanno ipotesi sulla struttura delle equazioni differenziali che descrivono il modello.
- *A scatola grigia*, in cui si suppone di conoscere la struttura delle equazioni differenziali del modello (ordine del modello), mentre i parametri sono incogniti.

**Esempio 3.** Supponiamo di voler determinare il modello di un motore elettrico a corrente continua con controllo in armatura. Dalla conoscenza dei fenomeni fisici che governano il sistema considerato è possibile determinare un modello parametrico del sistema:

$$\omega(s) = \frac{K_m}{(R_a + sL_a)(f + sJ) + K_m^2} v_a(s) \quad (4.1)$$

Tale modello è quindi descrivibile da una equazione differenziale del secondo ordine.

Il processo di identificazione in questo caso sarà interamente rivolto alla identificazione dei parametri  $K_m, R_a, L_a, f, J$  del modello.

Nel seguito considereremo solo il caso il procedimento di identificazione a scatola grigia, supponendo che la struttura del modello sia determinabile mediante conoscenza dei fenomeni fisici che lo descrivono oppure tramite applicazione di segnali di saggio.

## 4.2 Metodo della risposta al gradino.

Un metodo pratico ed efficace per determinare il modello matematico di un sistema dinamico consiste nell'applicare un ingresso a gradino e registrare l'andamento dell'uscita del sistema così sollecitato. (vedi figura 4.1)

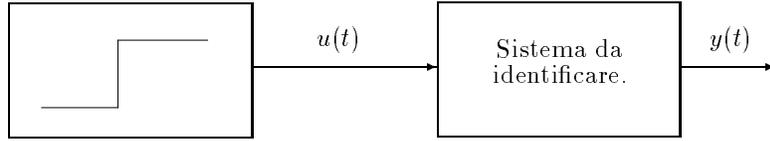


Figura 4.1: Applicazione di un ingresso a gradino ad un sistema dinamico per eseguirne l'identificazione.

L'ampiezza del segnale al gradino deve essere la massima possibile, avendo poi cura che questo non provochi la saturazione dell'attuatore, in modo da massimizzare il rapporto tra segnale utile registrato all'uscita del sistema e rumore di misura.

Per valutare le eventuali non linearità del sistema è opportuno applicare segnali di saggio di diversa ampiezza e considerare diversi punti di lavoro del sistema da identificare.

Alcuni esempi di risposte al gradino di sistemi dinamici sono rappresentate in figura 4.2

In figura 4.2(a) è mostrata la risposta al gradino di un sistema con polo dominante reale e negativo (sistema stabile). Le figure 4.2(b) e 4.2(d) mostrano le risposte di sistemi con due poli complessi coniugati in un caso a parte reale negativa (stabili) e nell'altro a parte reale positiva (instabili). Tali tipi di risposte sono tipici di sistemi meccanici in cui siano presenti materiali elastici, ad esempio ammortizzatori. Figura 4.2(c) mostra il comportamento di un sistema che si comporta come un integratore. Tale sistema risulta avere uscita divergente rispetto ad un ingresso a gradino.

In figura 4.2(e) è mostrata la risposta di un sistema con un ritardo finito. Questo tipo di segnale si ha nel caso in cui vi siano ritardi dovuti al trasporto di materiale, ad esempio fluidi lungo condotte. Figura 4.2(f) mostra sistemi a "fase non minima", in cui la risposta è inizialmente contraria al segno dell'ingresso di saggio. Un tipico caso consiste nel braccio flessibile di robot.

### Modello del primo ordine

Per sistemi che hanno una risposta a gradino del tipo rappresentato in figura 4.2(a) (sistemi con un polo stabile senza ritardo), è possibile determinare un modello del tipo:

$$G_1(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (4.2)$$

dove  $K$  è il *guadagno statico* del sistema, mentre  $1/\tau$  è il *polo del sistema*.

Come è noto per sistemi del primo ordine esiste la relazione tra tempo di assestamento  $T_a$  e  $\tau$  pari a  $T_a = 3\tau$ , e quindi è possibile determinare  $\tau$  a partire da misure del tempo di assestamento.

Questo metodo è però molto sensibile ai rumori di misura in quanto si basa su di un valore puntuale della variabile misurata. Un metodo più robusto consiste nel considerare l'integrale della differenza tra l'uscita del sistema all'istante  $t$  ed in condizioni di regime  $t \rightarrow \infty$ :

$$A = \int_0^{\infty} (y(\infty) - y(t)) dt \quad (4.3)$$

dove  $y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$  è il valore di regime che assume l'uscita una volta che si è esaurito il transitorio.

Sapendo che l'uscita del sistema sollecitato da un segnale di ingresso a gradino di ampiezza  $U$  è descrivibile da:

$$y(t) = KU(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (4.4)$$

otteniamo immediatamente il valore del polo del sistema 4.2 come:

$$\tau = \frac{A}{KU} \quad (4.5)$$

Il guadagno statico del sistema,  $K$ , è semplicemente calcolabile come:

$$K = \frac{y(\infty)}{U}$$

Il parametro  $\tau$  può essere anche calcolato in maniera grafica, infatti dalla relazione 4.4 si ottiene che:

$$y(\tau) = KU(1 - e^{-1}) \simeq KU0.63$$

e quindi in corrispondenza di  $t = \tau$  sull'asse delle ascisse, si ha una risposta pari a  $KU0.63$ , da cui è possibile ottenere per via grafica  $\tau$ .

### Integratore con ritardo

Sistemi con risposta del tipo mostrato in figura 4.2(e) possono venire approssimati con un modello molto semplice a due parametri:

$$G(s) = \frac{a}{sL} e^{-sL} \quad (4.6)$$

dove i parametri  $a$  ed  $L$  sono ottenuti in maniera grafica come mostrato dalla figura 4.3.

Occorre notare che questo modello è abbastanza accurato nel transitorio, mentre diverge sensibilmente dalla risposta a regime.

### Modello del primo ordine con ritardo

Per sistemi aventi risposta con un ritardo puro (vedi figura 4.2(e)) è possibile definire un modello con tre parametri, la cui funzione di trasferimento è:

$$G(s) = \frac{K}{s\tau + 1} e^{-sL} \quad (4.7)$$

dove  $K$ ,  $1/\tau$  e  $L$  sono rispettivamente il guadagno, il polo e il ritardo finito del sistema.

La risposta ad un gradino di ampiezza  $U$  di questo sistema è:

$$y(t) = KU(1 - e^{-\frac{t-L}{\tau}})$$

Da questa relazione segue immediatamente che l'integrale:

$$A_r = \int_0^{\infty} (y(\infty) - y(t)) dt \quad (4.8)$$

vale:

$$A_r = (\tau + L) KU$$

e quindi:

$$\tau + L = \frac{A_r}{KU} \quad (4.9)$$

Ancora il guadagno statico del sistema,  $K$ , è semplicemente calcolabile come:

$$K = \frac{y(\infty)}{U}$$

Mentre il ritardo finito del sistema  $L$  si calcola graficamente dalla risposta al gradino.

### Modello per sistemi con integratore

Il sistemi con integratore puro hanno uscita divergente quando viene applicato un ingresso a gradino. In tal caso è utilizzabile il modello a due parametri (un integratore ed un ritardo puro) visto in precedenza.

Un altro metodo consiste nella applicazione di un ingresso impulsivo che produce sul sistema un'uscita costante dopo il transitorio. In questo modo sarà possibile applicare i metodi visti nei casi precedenti ed ottenere il modello incognito moltiplicando la funzione di trasferimento identificata per  $1/s$ :

**Esempio 4.** Sollecitiamo il sistema con un ingresso impulsivo di ampiezza  $I$  e durata  $T$ . Applicando i metodi visti in precedenza supponiamo di aver identificato il sistema:

$$G_1(s) = \frac{K}{s\tau + 1} e^{-sL}$$

allora la funzione di trasferimento del sistema sarà:

$$G(s) = \frac{1}{sIT} G_1(s) = \frac{K}{sIT(s\tau + 1)} e^{-sL}$$

### Modelli per sistemi oscillatori.

Un modello in grado di descrivere una risposta al gradino di tipo oscillatorio è descritto dalla funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.10)$$

Il modello ha tre parametri: il *guadagno statico*  $K$ , la *pulsazione naturale*  $\omega_n$  ed il *coefficiente di smorzamento*  $\delta$ . Questi parametri possono essere identificati in modo approssimativo attraverso le formule:

$$d = e^{-2\delta\pi/\sqrt{1-\delta^2}} \quad T_p = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\delta^2}}$$

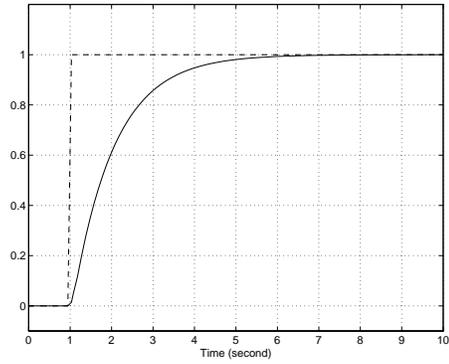
vale a dire:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi/\log d)^2}} \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T_p\sqrt{1-\delta^2}}$$

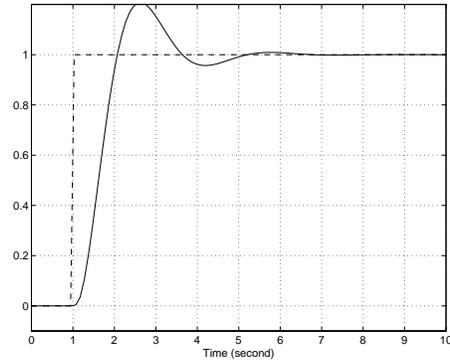
dove  $T_p$  e  $d$  possono venire calcolati come mostrato dalla figura 4.4.

### 4.3 Esercizi.

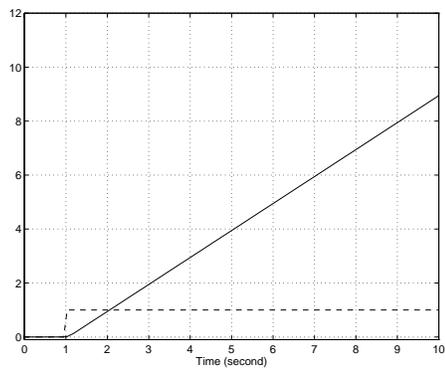
1. Dimostrare la relazione espressa dalla equazione 4.5
2. Dimostrare la relazione espressa dalla equazione 4.9
3. In riferimento alle risposte al gradino di figura 4.2, si determinino le funzioni di trasferimento che generano tali risposte al gradino. Si verifichi la risposta utilizzando il programma Matlab.



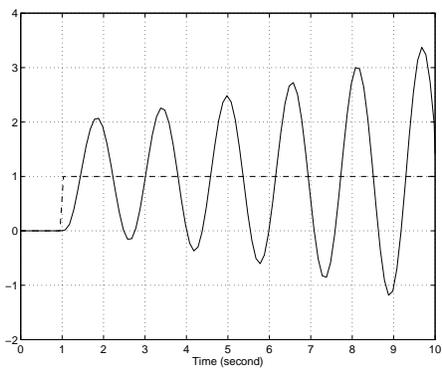
(a) Sistema stabile del primo ordine



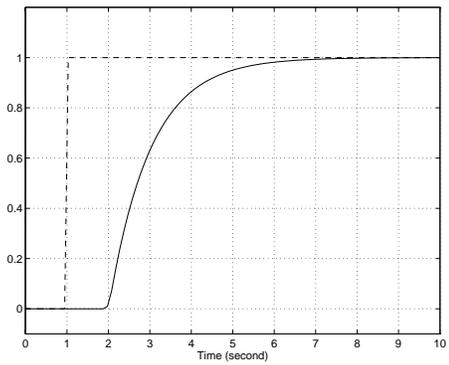
(b) Sistema stabile del secondo ordine



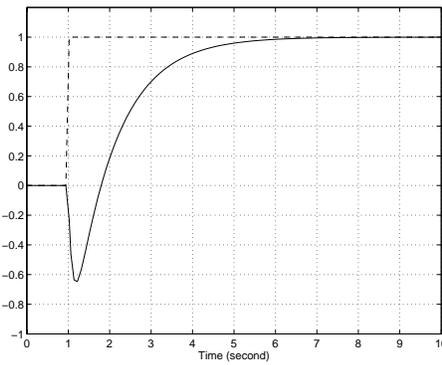
(c) Sistema con integratore



(d) Sistema instabile del secondo ordine



(e) Sistema con ritardo



(f) Sistema con zeri instabili

Figura 4.2: Esempi di risposte al gradino di sistemi dinamici. La linea tratteggiata corrisponde all'ingresso, la linea continua rappresenta la risposta del sistema.

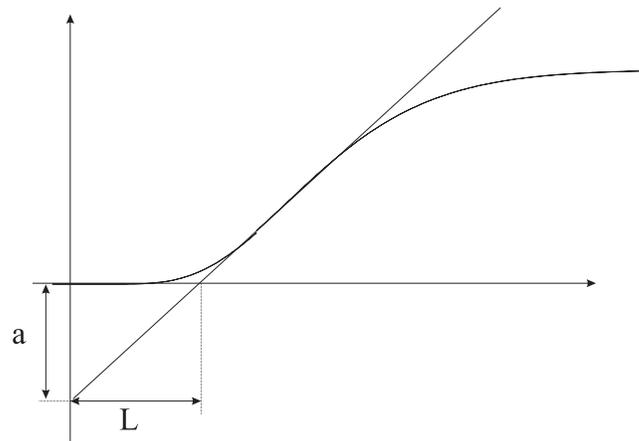


Figura 4.3: Metodo grafico per valutare i coefficienti di un modello a due parametri.

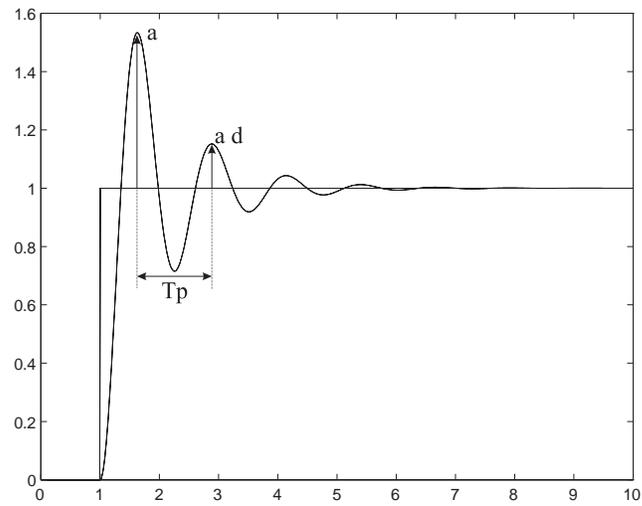


Figura 4.4: Determinazione dei parametri  $d$  e  $T_p$ .

# Capitolo 5

## Progetto di controllori PID

In questo capitolo vengono descritti alcuni metodi per la determinazione dei parametri di un controllore PID. Tali metodi si riferiscono ai modelli parametrici di sistemi dinamici sviluppati nel capitolo 4.

Prima di definire i metodi di progetto, occorre però indicare le prestazioni che si vogliono ottenere mediante il controllore che si intende progettare, ovvero è necessario fornire le *specifiche* di progetto.

### 5.1 Specifiche di progetto

Un controllore PID può essere usato per ottenere invarianza di risposta del sistema controllato verso applicazioni di disturbi esterni. Ad esempio nel caso di un motore elettrico, si richiede che il controllo di velocità mantenga il valore di riferimento impostato in modo indipendente dal carico applicato.

Un'altra modalità di funzionamento del PID consiste nell'inseguimento di un riferimento variabile, per cui le specifiche di progetto per un controllore PID possono essere divise in:

- Attenuazione dei disturbi dovuti alla applicazione di carico.
- Inseguimento di un riferimento variabile.

#### Disturbi di carico

I disturbi sono ingressi non manipolabili del sistema in esame. In genere, se non vi sono informazioni aggiuntive, si considera un disturbo che agisce sull'ingresso del sistema in modo additivo (vedi fig 2.1). In figura 5.1 sono evidenziati alcuni parametri utilizzati per caratterizzare la risposta di un sistema alla applicazione di un carico a gradino:

- $e_0$ : Rappresenta l'ampiezza dell'errore in assenza di azione di controllo.
- $e_{max}$ : Ampiezza massima dell'errore in presenza di azione di controllo.
- $t_{max}$ : Tempo in cui avviene l'errore massimo (in presenza di controllo).
- $d$ : Rapporto di smorzamento dell'errore (in presenza di controllo).  $d$  è pari al rapporto tra l'ampiezza dell'errore in corrispondenza della seconda e della prima sovravelongazione.
- $t_a$ : Tempo di assestamento entro cui l'errore (in presenza del controllo) si assesta entro una fascia pari al  $p\%$  di  $e_0$ .

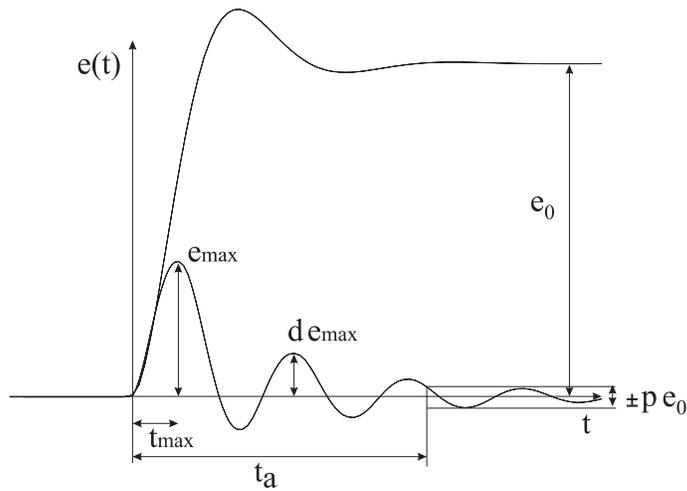


Figura 5.1: Errore dovuto alla applicazione di un disturbo a gradino. Sono evidenziati alcuni parametri per la caratterizzazione della risposta del sistema al disturbo.

### Inseguimento di un riferimento

In genere si forniscono le specifiche sull'inseguimento di un riferimento che varia con andamento a gradino. In riferimento alla figura 5.2:

- $t_s$ : Il tempo di salita corrisponde al tempo che impiega il sistema a passare dal 10% al 90% del suo valore di regime  $y_0$ .
- $t_a$ : Il tempo di assestamento è il tempo necessario al sistema ad assestarsi in un intervallo centrato nel valore di regime di ampiezza  $p\%$  (2% oppure 5%).
- $d$ : Il rapporto di smorzamento consiste nel rapporto tra due massimi consecutivi della differenza tra uscita del sistema  $y(t)$  e suo valore di regime  $y_0$ .
- $S$ : la massima sovraelongazione del sistema consiste nella differenza tra il massimo della risposta del sistema  $y(t)$  ed il suo valore di regime  $y_0$ .

## 5.2 Metodi di Ziegler-Nichols

Due metodi per la determinazione dei parametri di un controllore PID furono proposti da Ziegler e Nichols nel 1942, e rimangono a tuttora ampiamente utilizzati per la loro semplicità di uso. In questa sezione verranno mostrati tali metodi assieme ad alcune modifiche proposte in anni più recenti.

### Analisi della risposta al gradino

Questo metodo si riferisce ai parametri  $a$  e  $L$  del modello costituito da un integratore con ritardo introdotto nella sezione 4.2. Secondo il primo metodo di Ziegler e Nichols i parametri del PID si ottengono direttamente come funzione di  $a$  ed  $L$ , come mostrato nella tabella 5.1

La tabella fornisce anche una stima del periodo dell'uscita controllata  $T_p$  una volta che il sistema sia chiuso in retroazione.

### Analisi della risposta frequenziale

Questo metodo si basa sulla conoscenza del punto in cui la funzione di trasferimento  $G(s)$  che descrive il processo interseca il semiasse negativo del diagramma di Nyquist.

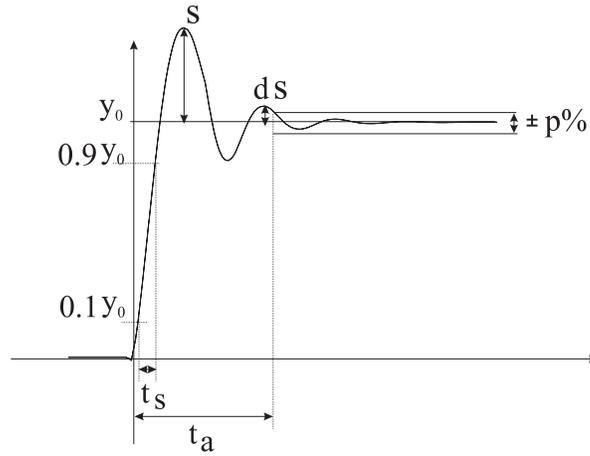


Figura 5.2: Specifiche sull'inseguimento di un riferimento caratterizzate dalla risposta del sistema al gradino unitario.

Controllore	$K$	$T_i$	$T_d$	$T_p$
P	$1/a$			$4L$
PI	$0.9/a$	$3L$		$5.7L$
PID	$1.2/a$	$2L$	$L/2$	$3.4L$

Tabella 5.1: Metodo di Ziegler-Nicols (risposta al gradino)

Tale punto può essere determinato in modo approssimato per via sperimentale:

- Chiudere la retroazione sul sistema tramite un controllore proporzionale. ( $T_i = \infty$ ,  $T_d = 0$ ).
- Aumentare il guadagno  $K$  del controllore fino a che l'uscita del sistema non inizia ad oscillare.
- Il guadagno  $K_u$  così determinato ed il periodo di oscillazione  $T_u$  definiscono il punto in cui la funzione in catena aperta interseca il semiasse reale negativo del diagramma di Nyquist.

Ziegler e Nichols definirono una tabella che lega  $K_u$  e  $T_u$  così determinati con i parametri del PID ed il periodo dell'uscita del sistema (tabella 5.2)

Controllore	$K$	$T_i$	$T_d$	$T_p$
P	$0.5K_u$			$T_u$
PI	$0.4K_u$	$0.8T_u$		$1.4T_u$
PID	$0.6K_u$	$0.5T_u$	$0.125T_u$	$0.85T_u$

Tabella 5.2: Metodo di Ziegler-Nicols (frequenza caratteristica)

## Discussione sui metodi di Ziegler-Nichols

I metodi di sintesi di Ziegler e Nichols furono originariamente proposti per ottenere una buona risposta del sistema rispetto a perturbazioni di carico, e quindi è possibile che non forniscano prestazioni del tutto soddisfacenti nell'inseguimento del segnale di riferimento.

Questi metodi sono stati messi a punto in modo qualitativo in base ad osservazioni fatte durante esperimenti ripetuti effettuati su sistemi di tipologia differente.

Il criterio di guida è stato quello di ottenere un rapporto di smorzamento pari a 0.25, che in molti casi può essere considerato un valore un po' troppo elevato. Per questo motivo i metodi di Ziegler e

Nichols sono da considerarsi “di primo tentativo”, e quindi una fase di sintonia fine in linea è nella maggior parte dei casi necessaria.

In particolare per diminuire la sensibilità del sistema ad un ingresso di riferimento a gradino, che condurrebbe a sovraelongazioni troppo elevate, è possibile agire sul guadagno  $b$  della parte proporzionale del PID (vedi equazione 3.9) diminuendolo, oppure, in alternativa, filtrare l'ingresso di riferimento in modo da evitare brusche variazioni.

### 5.3 Metodi analitici di tuning.

Il vantaggio dei metodi di Ziegler e Nichols consiste nel fatto che è sufficiente una conoscenza parziale del processo da controllare ricavato utilizzando semplici segnali di saggio. Di contro le prestazioni del controllore non sono molto buone ed in genere occorre eseguire una sintonia fine in linea.

Per migliorare i criteri di progetto occorre aumentare la conoscenza sul processo da controllare. In particolare conoscendo la funzione di trasferimento è possibile ottenere il controllore per calcolo diretto.

Consideriamo il caso mostrato in figura 5.3 in cui il processo da controllare è descritto dalla funzione di trasferimento  $G_p(s)$ , il controllore, incognito, è descritto da  $G_c(s)$  e il sistema ad anello chiuso è descritto da  $G_o(s)$ , in base alle specifiche imposte dal progettista.

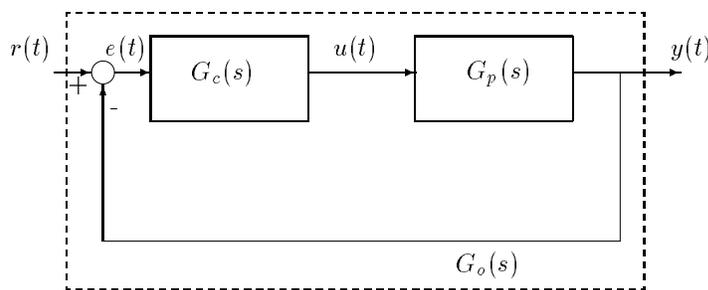


Figura 5.3: Sistema chiuso in retroazione unitaria.

L'equazione che definisce la relazione tra  $G_p(s)$ ,  $G_c(s)$  e  $G_o(s)$  è:

$$G_o = \frac{G_p G_c}{1 + G_p G_c} \quad (5.1)$$

da cui risulta che la funzione di trasferimento incognita del controllore è:

$$G_c = \frac{G_o}{G_p} \frac{1}{1 - G_o} \quad (5.2)$$

Quindi una volta fissata la  $G_o$  in base alle specifiche da rispettare è semplice determinare la funzione di trasferimento del controllore.

Occorre notare che nel progetto del controllore vi possono essere cancellazioni tra gli zeri del controllore ed i poli del sistema, per cui questo modo di procedere può determinare una perdita della controllabilità del sistema ed in genere problemi nel controllare sistemi a fase non minima oppure con poli vicini all'asse immaginario.

#### Specifiche di progetto ed allocazione dei poli.

Le specifiche di progetto introdotte nella sezione 5.1 possono venire messe in relazione ai poli della funzione di trasferimento in anello chiuso ricercato  $G_o(s)$  nel caso di sistemi del primo e secondo ordine.

Per procedere nella trattazione consideriamo due funzioni di trasferimento:

$$G'_o(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

$$G''_o(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

rispettivamente aventi poli in:

$$p' = -1/\tau$$

ed

$$p''_{1,2} = -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}$$

La relazione tra le specifiche di progetto ed i poli delle funzioni di trasferimento  $G'_o(s)$  e  $G''_o(s)$  sono descritte in Tabella 5.3<sup>1</sup>.

Specifica	Sistema del primo ordine	Sistema del secondo ordine
$t_s$	$2.2\tau$	$\frac{0.8+2.5\delta}{\omega_n}$ per $0 < \delta < 1$
$t_a$	$3\tau$	$\frac{3.2}{\delta\omega_n}$ , per $0 < \delta < 0.69$ $\frac{4.5\delta}{\omega_n}$ , per $\delta > 0.69$
$d$		$e^{-2\pi\delta/\sqrt{1-\delta^2}}$
$S$		$e^{-\pi\delta/\sqrt{1-\delta^2}}$

Tabella 5.3: Relazione tra specifiche di progetto e allocazione dei poli della funzione di trasferimento in anello chiuso

Nel caso in cui il processo da controllare  $G_o(s)$  sia di ordine superiore al secondo la funzione di trasferimento in anello chiuso  $G_o(s)$  non potrà ovviamente essere riconducibile ad una del secondo ordine. In tal caso per poter ancora utilizzare le formule viste occorrerà assegnare i poli in modo che ve ne siano uno o due con dinamica dominante e gli altri con dinamica trascurabile.

**Esempio 5 (Controllo PI di un sistema del primo ordine).** Supponiamo che il sistema da controllare sia modellato dalla funzione di trasferimento del primo ordine:

$$G_p(s) = \frac{K_p}{s\tau + 1}$$

Questo sistema non presenta un polo nell'origine, per cui per annullare l'errore a regime occorre utilizzare un controllore di tipo I. Tuttavia, come vedremo in seguito, per poter assegnare i poli del sistema in anello chiuso occorre utilizzare un controllore con almeno due gradi di libertà, per cui risulta opportuno utilizzare un controllore di tipo PI:

$$G_c(s) = K \left( 1 + \frac{1}{sT_i} \right)$$

<sup>1</sup>Queste relazioni sono approssimate. Per ulteriori dettagli si veda: B.J. Kuo, "Automatic Control System", Prentice Hall, 7-th ed., chapter 7-4, e G. Marro, "Controlli Automatici", Zanichelli, terza edizione, capitolo 2-4.

Chiudendo il sistema in retroazione (vedi equazione 5.1) otteniamo che i poli complessivi sono dati dalla equazione caratteristica:

$$1 + G_c G_p = 0$$

cioè:

$$s^2 + s \frac{1 + K_p K}{\tau} + \frac{K_p K}{\tau T_i}$$

Supponendo che la funzione di trasferimento del sistema in retroazione  $G_o$  sia caratterizzata dalla pulsazione naturale  $\omega_n$  e coefficiente di smorzamento  $\delta$ , l'equazione caratteristica desiderata diventa:

$$s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2$$

Imponendo che i coefficienti siano uguali si ottiene:

$$K = \frac{2\delta\omega_n \tau - 1}{K_p}$$

$$T_i = \frac{2\delta\omega_n \tau - 1}{\omega_n^2 \tau}$$

**Esempio 6 (Sistema del secondo ordine con zero).** Consideriamo un sistema caratterizzato dal modello:

$$G_p(s) = \frac{\gamma_1 s + \gamma_0}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Questo modello ha due poli, che possono essere reali o immaginari ed uno zero. Questo tipo di modello può descrivere sistemi con risposta oscillante e a fase non minima.

Il controllore utilizzato per questo tipo di processo è il PID in forma standard:

$$G_c(s) = K_p \left( \frac{s^2 T_i T_d + s T_i + 1}{s T_i} \right)$$

Il sistema in anello chiuso è del terzo ordine con equazione caratteristica:

$$\gamma_0 K_p + s(\gamma_1 K_p + \alpha_0 T_i + \gamma_0 K_p T_i) + s^2(\alpha_1 T_i + \gamma_1 K_p T_i + \gamma_0 K_p T_d T_i) + s^3(T_i + \gamma_1 K_p T_d T_i) = 0$$

Una scelta conveniente per l'equazione caratteristica del sistema chiuso in retroazione può essere del tipo:

$$s^3 + p_2 s^2 + p_1 s + p_0 = 0$$

cioè un sistema con tre poli.

Eguagliando i coefficienti dei polinomi caratteristici si ottengono i valori dei parametri del PID (tabella 5.4).

## 5.4 Esercizi

1. Discutere la possibilità di applicare il metodo di Ziegler-Nichols che utilizza l'analisi della risposta frequenziale (vedi sezione 5.2) nel caso in cui si voglia controllare un sistema del primo ordine senza ritardo.

$K_p = \eta_1$	$T_i = \eta_1/\eta_0$	$T_d = \eta_2/\eta_1$
$\eta_0 = \frac{\gamma_0 \gamma_1 p_0 \alpha_1 - \gamma_1^2 p_0 \alpha_0 - p_0 \gamma_0^2}{\gamma_0^2 \gamma_1 p_2 - \gamma_0^3 - p_1 \gamma_1^2 \gamma_0 + p_0 \gamma_1^3}$		
$\eta_1 = \frac{(p_1 \gamma_0 - p_0 \gamma_1) \eta_0 - p_0 \alpha_0}{p_0 \gamma_0}$		
$\eta_2 = \left( \frac{\gamma_0 \eta_0}{p_0} - 1 \right) \frac{1}{\gamma_1}$		

Tabella 5.4: Assegnamento dei poli per un sistema del secondo ordine.

# Bibliografia

- [aa. vv., 1995] aa. vv. (1995). *Regolatori PID Avanzati per Realtà industriali: Realtà e prospettive*. A.N.I.P.L.A., P.le Morandi, 2 Milano.
- [aa. vv., 1996] aa. vv. (1996). Speciale PID. *Automazione e strumentazione*.
- [Åström and Hägglund, 1995] Åström, K. J. and Hägglund, T. (1995). *PID controllers: theory design and tuning*. The International Society for Measurement and Control (ISA).
- [Kuo, 1995] Kuo, C. B. (1995). *Automatic Control Systems*. Prentice Hall, seventh edition.
- [Marro, 1987] Marro, G. (1987). *Controlli Automatici*. Zanichelli, terza edition.
- [Peng et al., 1996] Peng, Y., Vrancic, D., and Raymon, H. (1996). Anti-windup, bumpless, and conditioned transfer techniques for PID controllers. *IEEE Control System Magazine*, pages 48–57.