

Automatica I (Laboratorio)

Silvio Simani

Dipartimento di Ingegneria
Università di Ferrara
Tel. 0532 293844
Fax. 0532 768602

E-mail: ssimani@ing.unife.it

URL: <http://www.ing.unife.it/simani>

URL: <http://www.ing.unife.it/simani/lessons.html>



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Schema delle lezioni.

- Schema logico di un controllore digitale.
- Introduzione al metodo di progetto per "discretizzazione".
- Metodi per l'analisi di successioni.
- Rappresentazione di sistemi lineari mediante equazioni alle differenze.
- Successioni ottenute da campionamento di segnale continuo.
- Il metodo di progetto per "discretizzazione".
- PID digitale.
- Metodi di antisaturazione.



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Argomento

» Schema logico di un controllore digitale.

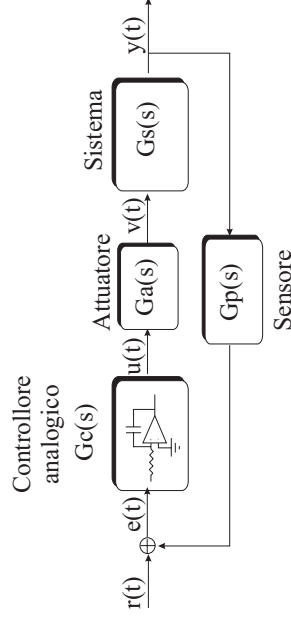
- Introduzione al metodo di progetto per "discretizzazione".
- Metodi per l'analisi di successioni.
- Rappresentazione di sistemi lineari mediante equazioni alle differenze.
- Successioni ottenute da campionamento di segnale continuo.
- Il metodo di progetto per "discretizzazione".
- PID digitale.
- Metodi di antisaturazione.



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

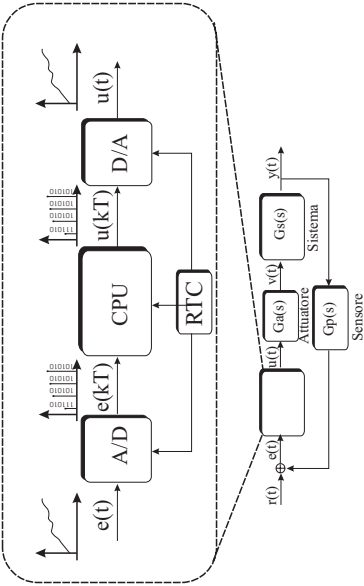
Schema logico di un controllore analogico



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Schema logico di un controllore digitale.



Introduzione al metodo di progetto per “discretizzazione”

1. Si conduce il progetto di un controllore a tempo continuo, ottenendo una funzione di trasferimento del tipo $G_c(s)$.
2. Si discretizza la funzione di trasferimento del controllore utilizzando un metodo di discretizzazione $z = f(s)$, ottenendo una funzione di trasferimento del tipo $G'_c(z)$.
3. Si implementa il controllore utilizzando una equazione alle differenze ottenuta dalla funzione di trasferimento.

$$u(z) = G'_c(z)e(z) \Rightarrow u(kT) = g(u(kT - T), \dots, e(kT), e(kT - T), \dots)$$



Argomento

- Schema logico di un controllore digitale.
- » **Introduzione al metodo di progetto per “discretizzazione”**.
- Metodi per l'analisi di successioni.
- Rappresentazione di sistemi lineari mediante equazioni alle differenze.
- Successioni ottenute da campionamento di segnale continuo.
- Il metodo di progetto per “discretizzazione”.
- PID digitale.
- Metodi di antisaturazione.

Argomento

- Schema logico di un controllore digitale.
- Introduzione al metodo di progetto per “discretizzazione”.
- » **Metodi per l'analisi di successioni**.
- Rappresentazione di sistemi lineari mediante equazioni alle differenze.
- Successioni ottenute da campionamento di segnale continuo.
- Il metodo di progetto per “discretizzazione”.
- PID digitale.
- Metodi di antisaturazione.

Metodi per l'analisi di successioni

- Successioni numeriche.
- Trasformata "zeta" di successioni.
- Proprietà delle "zeta" trasformate (ritardo temporale).
- Equazioni alle differenze lineari e loro trasformata.
- Funzioni di trasferimento.
- Proprietà della funzione di trasferimento.



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Trasformata "Zeta" di successioni.

- Si dice **trasformata Zeta** di una successione la serie così definita:

$$X(z) := \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}$$

- dove $X(z)$ è una **funzione complessa** nella **variabile complessa** z .



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Successioni numeriche.

- Definiamo **Successione numerica** la successione infinita di valori numerici:

$$x_0, x_1, \dots, x_k$$

- La successione numerica può essere interpretata come una funzione avente come **dominio** l'insieme dei numeri naturali e **codominio** l'insieme dei numeri reali.

$$x(k) : k \in \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$$

Note sul lucido 11

- La convergenza della serie $X(z)$ dipende dagli elementi della successione x_k e dai valori che assume la variabile z . In generale si avrà un dominio di convergenza corrispondente alla parte di piano complesso esterno ad una circonferenza di raggio ρ_c .
- La trasformata zeta traduce una serie infinita di valori numerici in una funzione complessa. Chiaramente la funzione avrà una struttura semplice solamente se la successione presenta una struttura regolare. Per esempio consideriamo la serie:

$$x_k = 1, \forall k \geq 0$$

si traduce nella trasformata Zeta:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} = \frac{z}{z-1}$$

- Nel seguito indicheremo con $\mathcal{Z}[x_k]$ l'applicazione dell'operatore **trasformata Zeta** della successione x_k .
- La trasformata Z non ha alcuna relazione con alcuna collocazione temporale dei campioni (non vi è relazione con un il periodo di campionamento con cui sono stati ottenuti i campioni).

Proprietà della \mathcal{Z} -trasformata

- Linearità.
- Traslazione.
- Traslazione complessa.
- Valore iniziale.
- Valore finale.
- Convoluzione.



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Traslazione all'indietro

- Traslazione all'indietro:

$$\mathcal{Z}[x_{k-n}] = z^{-n} \mathcal{Z}[x_k]$$

- Caso particolare $n = 1$:

$$\mathcal{Z}[x_{k-1}] = z^{-1} \mathcal{Z}[x_k]$$



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Note sul lucido 13

Dimostrazione

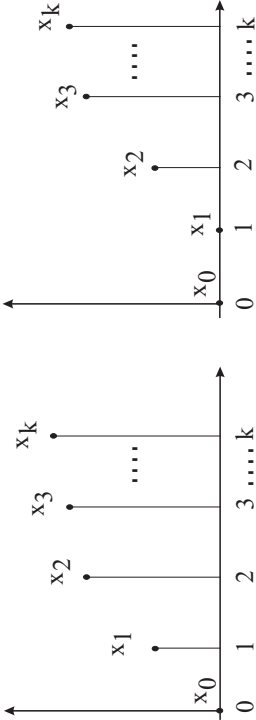
$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x_k] &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \\ \mathcal{Z}[x_{k-n}] &= \sum_{k=0}^{\infty} x_{k-n} z^{-k} \text{ ponendo } k-n=k' \\ &= \sum_{k'+n=0}^{\infty} x_{k'} z^{-k'-n} \\ &= z^{-n} \sum_{k'=-n}^{\infty} x_{k'} z^{-k'} \text{ pongo } k'=k \\ &= z^{-n} \left(\underbrace{\sum_{k=-n}^{-1} x_k z^{-k}}_{=0 \text{ siccome } x_k=0 \text{ per } k<0} + \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \right) \end{aligned}$$



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Esempio: successione x_{k-1}



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Traslazione in avanti

- Traslazione in avanti:
- Caso particolare $n = 1$:

$$\mathcal{Z}[x_{k+n}] = \left\{ \mathcal{Z}[x_k] - \sum_{k=0}^{n-1} x_k z^{-k} \right\} z^n$$

$$\mathcal{Z}[x_{k+1}] = \{ \mathcal{Z}[x_k] - x_0 \} z$$



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Dimostrazione



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Note sul lucido 15

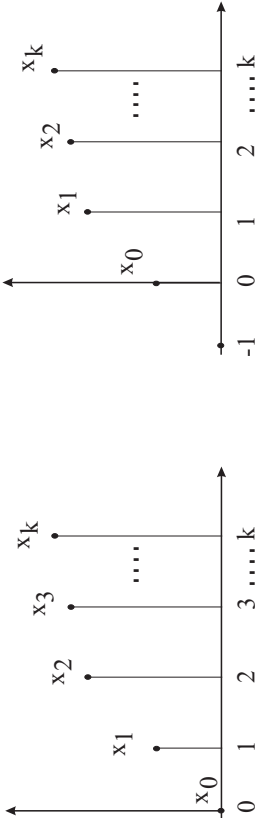
$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x_k] &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \\ \mathcal{Z}[x_{k+n}] &= \sum_{k=0}^{\infty} x_{k+n} z^{-k} \text{ ponendo } k+n=k' \\ &= \sum_{k'=n}^{\infty} x_{k'} z^{-k'+n} \\ &= z^n \sum_{k'=n}^{\infty} x_{k'} z^{-k'} \text{ pongo } k'=k \\ &= z^n \left(\sum_{k=n}^{\infty} x_k z^{-k} + \sum_{k=0}^{n-1} x_k z^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x_k z^{-k} \right) \\ &= z^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x_k z^{-k} \right) \end{aligned}$$



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Esempio: successione x_{k+1}



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Argomento

- Schema logico di un controllore digitale.
- Introduzione al metodo di progetto per “discretizzazione”.
- Metodi per l'analisi di successioni.

» Rappresentazione di sistemi lineari mediante equazioni alle differenze.

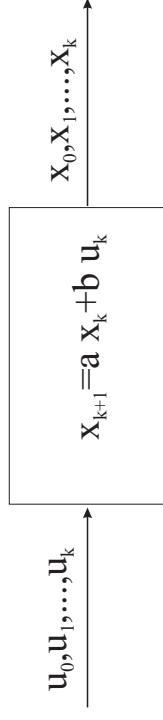
- Successioni ottenute da campionamento di segnale continuo.
- Il metodo di progetto per “discretizzazione”.
- PID digitale.
- Metodi di antisaturazione.



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Sistemi lineari ed equazioni alle differenze



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Rappresentazione mediante \mathcal{Z} -trasformate

- Utilizzando le proprietà delle \mathcal{Z} -trasformate è possibile rappresentare un sistema dinamico lineare descritto da equazioni alle differenze mediante una funzione di trasferimento.
- Esempio trasformazione della equazione alle differenze:

Equazione alle differenze: $x_{k+1} = a x_k + b u_k$

Trasformata: $\mathcal{Z} [x_{k+1} = a x_k + b u_k] \Rightarrow \mathcal{Z} [x_k] z = a \mathcal{Z} [x_k] + b \mathcal{Z} [u_k]$

$$\text{Da cui: } \frac{\mathcal{Z} [x_k]}{\mathcal{Z} [u_k]} = \frac{N(z)}{D(z)} = G(z) = \frac{b}{z - a}$$



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Proprietà della Funzione di Trasferimento (F.d.T.)

- La F.d.T. descrive completamente il comportamento del sistema.
 - È possibile calcolare la risposta x_k del sistema una volta nota la successione di ingresso u_k .

$$x(z) = G(z)u(z)$$

- È possibile valutare le caratteristiche di stabilità del sistema analizzando i poli della F.d.T.



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Forme equivalenti della F.d.T.

$$\begin{aligned}x(z) &= G(z)u(z) = \frac{a_n z^n + \dots + a_1 z^1 + a_0}{b_m z^m + \dots + b_1 z^1 + b_0} u(z) = \\&= \frac{z^{-m}}{z^{-m}} G(z)u(z) = G(z^{-1})u(z) = \frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})} u(z) \\&= \frac{a_n z^{n-m} + \dots + a_1 z^{1-m} + a_0 z^{-m}}{b_m + \dots + b_1 z^{1-m} + b_0 z^{-m}} u(z) \\&= \frac{a'_n z^{n-m} + \dots + a'_1 z^{1-m} + a'_0 z^{-m}}{1 + \dots + b'_1 z^{1-m} + b'_0 z^{-m}} u(z) \quad \text{avendo posto } a'_n = \frac{a_n}{b_m}, \dots,\end{aligned}$$



Ritornando alla equazione alle differenze

$$x(z)(1 + \dots + b'_1 z^{1-m} + b'_0 z^{-m}) = u(z)(a'_n z^{n-m} + \dots + a'_1 z^{1-m} + a'_0 z^{-m})$$

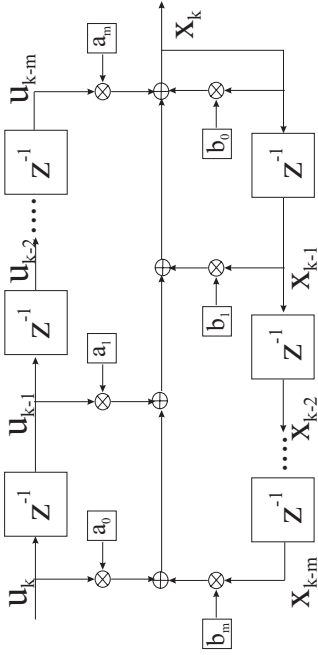
$$x(k) + \dots + b'_1 x(k+1-m) + b'_0 x(k-m) =$$

$$a'_n u(k+n-m) + \dots + a'_1 x(k+1-m) + a'_0 x(k-m)$$

- Per la casualità del sistema occorre che sia $n - m < 0$



Schema a blocchi



Argomento

- Schema logico di un controllore digitale.
- Introduzione al metodo di progetto per “discretizzazione”.
- Metodi per l'analisi di successioni.
- Rappresentazione di sistemi lineari mediante equazioni alle differenze.

Successioni ottenute da campionamento di segnale continuo.

- Il metodo di progetto per “discretizzazione”.
- PID digitale.
- Metodi di antisaturazione.



Successioni ottenute da campionamento di segnale continuo

- Modello matematico dell'operazione di campionamento.
- Il fenomeno dell'aliasing.
- Ricostruttore di segnale (Sample/Hold).

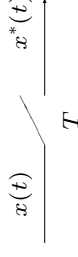


Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Analisi del processo di campionamento

- Campionamento del segnale continuo $x(t)$ ottenendo il segnale (ancora a tempo continuo) $x^*(t)$.



- Rappresentazione matematica del processo di campionamento:

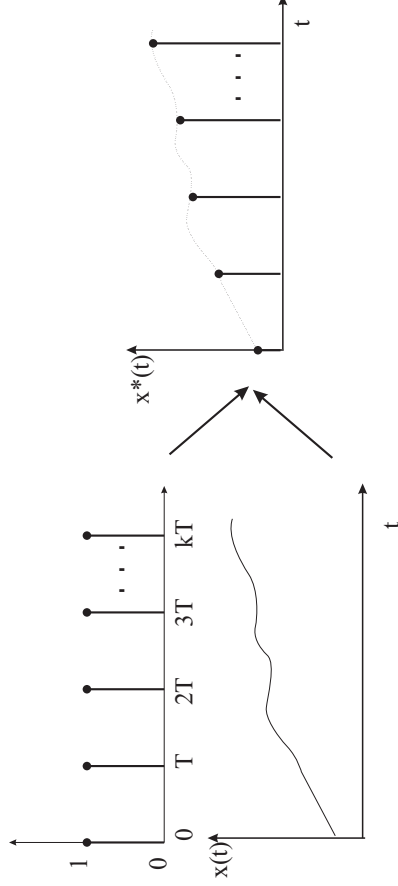
$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - kT)$$



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Campionatore



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Spettro del segnale campionato.

1. Il segnale campionato $x^*(t)$ è un segnale periodico e quindi rappresentabile mediante **serie di Fourier**:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j(2\pi n/T)t}$$

2. dove il coefficiente C_n si calcola come:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t - kT) e^{-jn(2\pi t/T)} dt$$



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

3. Il solo impulso compreso nell'intervallo di integrazione è quello nell'origine (per cui è $k = 0$):

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn(2\pi t/T)} dt$$

4. In base alla proprietà della funzione $\delta(t)$: $\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn(2\pi t/T)} dt = 1$, per cui:

$$C_n = \frac{1}{T}$$



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

5. Per cui otteniamo la rappresentazione secondo trasformata di Fourier del campionario ideale:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(2\pi n/T)t}$$

6. Definiamo la **pulsazione di campionamento** $\omega_s = 2\pi/T$, e calcoliamo la trasformata di Laplace di un campionario ideale:

$$\mathcal{L}[x^*(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} \right] e^{-st} dt$$



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

7. Integrando la serie termine a termine (i.e. scambiando fra loro l'integrale e la somma):

$$\mathcal{L}[x^*(t)] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{jn\omega_s t} e^{-st} dt$$

8. In base al teorema della traslazione in campo complesso relativo alla trasformata di Laplace:

$$\mathcal{L}[x^*(t)] = X^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}[x(t) e^{jn\omega_s t}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(s - jn\omega_s)$$



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

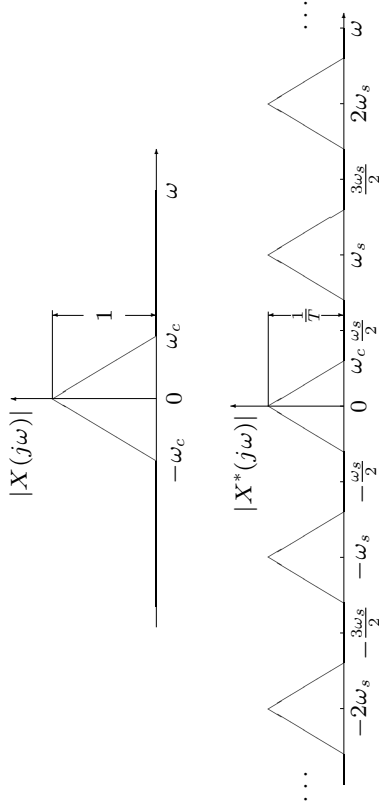
- A meno della costante moltiplicativa $1/T$, la trasformata di Laplace $X^*(s)$ del segnale campionato si ottiene dalla somma degli infiniti termini, $X(s - jn\omega_s)$, ciascuno dei quali si ottiene dalla $X(s)$ mediante traslazione di $jn\omega_s$ nel campo complesso.
- L'andamento spettrale del segnale campionato vale:

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j\omega - jn\omega_s)$$



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani



- La condizione $\omega_s > 2\omega_c$ mantiene distinto lo spettro originario dalle componenti complementari per cui, mediante filtraggio, è possibile ricostruire completamente il segnale $x(t)$.



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Teorema di Shannon

- Teorema di Shannon**

Sia $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ la pulsazione di campionamento (T è il periodo di campionamento), e sia ω_c la più alta componente spettrale del segnale tempo-continuo $x(t)$. Il segnale $x(t)$ è completamente ricostruibile a partire dal segnale campionato $x^*(t)$ se e solo se la pulsazione ω_s è maggiore del doppio della pulsazione ω_c :

$$\omega_s > 2\omega_c$$

- Ricostruzione mediante filtro ideale

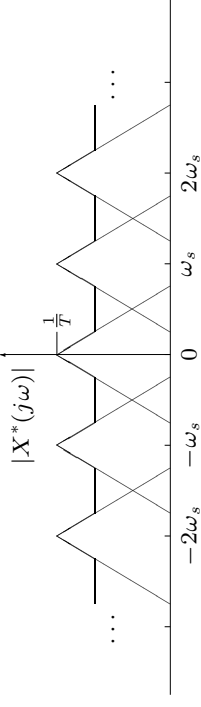
$$G_I(j\omega) = \begin{cases} T & -\frac{\omega_s}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

- Nel caso in cui la condizione $\omega_s > 2\omega_c$ non venga rispettata:



- Lo spettro originario è parzialmente sovrapposto alle componenti complementari contigue per cui mediante filtraggio non è più possibile ricavare il segnale originario a partire dal segnale campionato

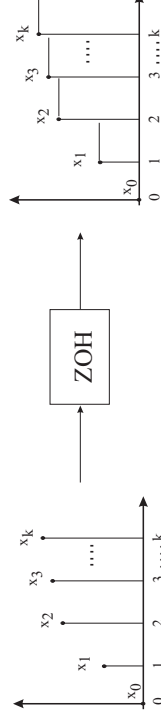


Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Il ricostruttore reale: lo Zero Order Hold (ZOH)

- Lo **ZOH** mantiene ad un valore costante i campioni su tutto il periodo di campionamento T .
- Da un punto di vista tecnologico, la funzione di **ZOH** è implementata da un **Sample and Hold**.



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Caratterista dello ZOH

- La caratteristica dello ZOH si ricava dalla funzione a gradino $s(t)$ calcolata all'istante $t = kT$ a cui si sottrae la stessa funzione calcolata in $t = k'T - T$.

$$p(t) = s(t) - s(t - T)$$

$$\mathcal{L}[p(t)] = \mathcal{L}[s(t) - s(t - T)] = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Argomento

- Schema logico di un controllore digitale.
- Introduzione al metodo di progetto per "discretizzazione".
- Metodi per l'analisi di successioni.
- Rappresentazione di sistemi lineari mediante equazioni alle differenze.
- Successioni ottenute da campionamento di segnale continuo.

Il metodo di progetto per "discretizzazione"

- PID digitale.
- Metodi di antisaturazione.

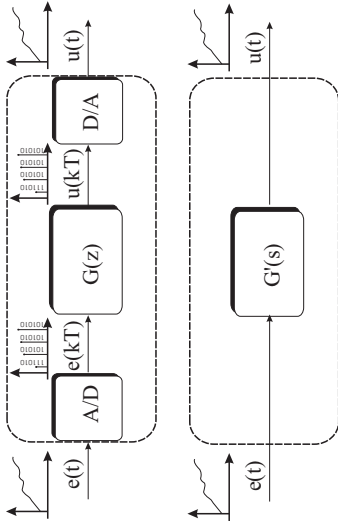


Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Il metodo di progetto per "discretizzazione"

- Equivalenza tra segnali rappresentati mediante \mathcal{L} -trasformate e \mathcal{Z} -trasformate.



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Discretizzazione

- La discretizzazione è il processo attraverso cui è possibile trasformare la rappresentazione $G(s)$ di un sistema a tempo continuo nella rappresentazione $G(z)$ a tempo discreto.

$$G(s) \xrightarrow{z=f(s)} G'(z)$$

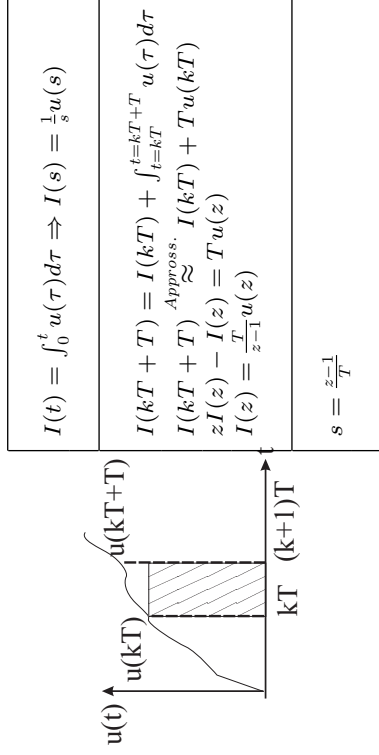
Occorre determinare la funzione
 $z = f(s)$



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

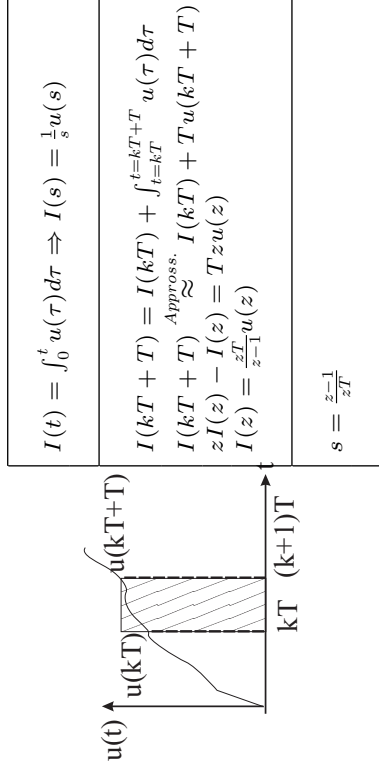
Metodi di discretizzazione - 1) Forward difference



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

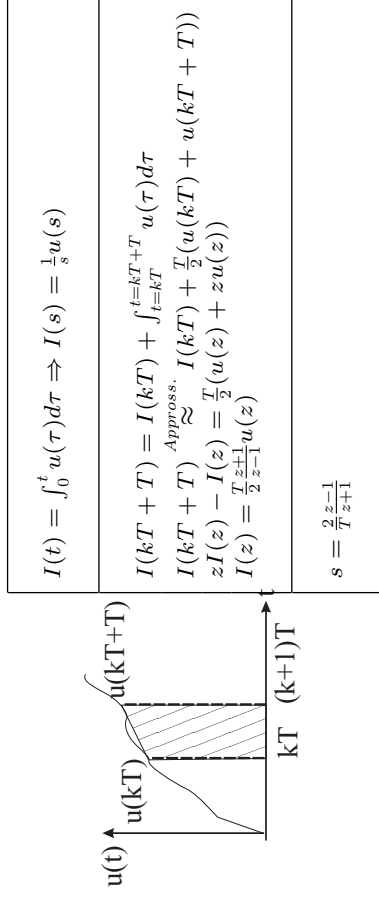
Metodi di discretizzazione - 2) Backward difference



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Metodi di discretizzazione - 3) Bilinear



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Equazioni alle differenze

- L'implementazione finale richiede di ricavare l'equazione alle differenze che implementa il regolatore dalla funzione di trasferimento discreta.

$$u(z) = \frac{a_n z^{n-m} + \dots + a_1 z^{1-m} + a_0 z^{-m}}{b_m + \dots + b_1 z^{1-m} + b_0 z^{-m}} e(z), \quad n < m$$

$$\Downarrow$$

$$b_m u(kT) + \dots + b_1 u(kT - mT + T) + b_0 u(kT - mT) =$$

$$= a_n e(kT - mT + nT) + \dots + a_1 e(kT - mT + T) + a_0 e(kT - mT)$$



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Implementazione finale

```
static float u[n],e[m];
static float a[n], b[m];

controllore(e[0])
{
    /* Algoritmo di controllo */
    u[0] = 1/b[m]*(-(b[m-1]*u[1] + ... + b[0]*u[m])) + ...
    ... + 1/b[m] * (a[n]*e[m-n] + a[n-1]*e[m-n+1]+... + a[0]*e[m]);
    /* Aggiornamento campioni precedenti */
    u[1]=u[0]; u[2]=u[1]; ... u[n]=u[n-1];

    e[1]=e[0]; e[2]=e[1]; ... e[m]=e[m-1];
    return(u[0])
}
```



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Argomento

- Schema logico di un controllore digitale.
 - Introduzione al metodo di progetto per “discretizzazione”.
 - Metodi per l'analisi di successioni.
 - Rappresentazione di sistemi lineari mediante equazioni alle differenze.
 - Successioni ottenute da campionamento di segnale continuo.
 - Il metodo di progetto per “discretizzazione”.
- » **PID digitale.**
- Metodi di antisaturazione.



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Algoritmo PID digitale

- L'algoritmo PID continuo:

$$u(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{s T_d}{T_d s + 1} \right)$$

● Discretizzazione della funzione di trasferimento $G_c(s)$.



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Discretizzazione della $G_c(s)$

$$u(z) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \bigg|_{s=\frac{z-1}{T}} + \frac{s T_d}{\frac{T_d}{N} s + 1} \bigg|_{s=\frac{z-1}{T}} \\ = K \left(1 + \frac{T}{T_i(z-1)} + \frac{T_d}{T + T_d/N} \frac{z-1}{[z - T_d/(NT + T_d)]} \right)$$



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

- Con le posizioni

$$\alpha = \frac{T}{T_i} \qquad \beta = \frac{NT_d}{(NT+T_d)} \qquad \gamma = \frac{T_d}{(NT+T_d)}$$

$$q_0 = K_p(1 + \beta), \quad q_1 = -K_p(1 + \gamma - \alpha + 2\beta) \quad q_2 = K_p(\gamma - \alpha\gamma + \beta)$$

- Il regolatore si riscrive come

$$G_c(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_2}{(z-1)(z-\gamma)} = \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_2}{z^2 - (\gamma+1)z + \gamma}$$



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Argomento

- Schema logico di un controllore digitale.
- Introduzione al metodo di progetto per “discretizzazione”.
- Metodi per l'analisi di successioni.
- Rappresentazione di sistemi lineari mediante equazioni alle differenze.
- Successioni ottenute da campionamento di segnale continuo.
- Il metodo di progetto per “discretizzazione”.
- PID digitale.

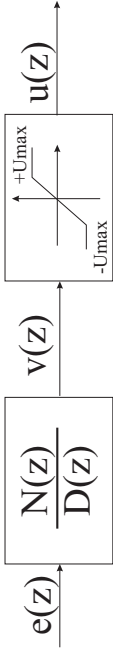
Metodi di antisaturazione.



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Metodo di antisaturazione (Errato)



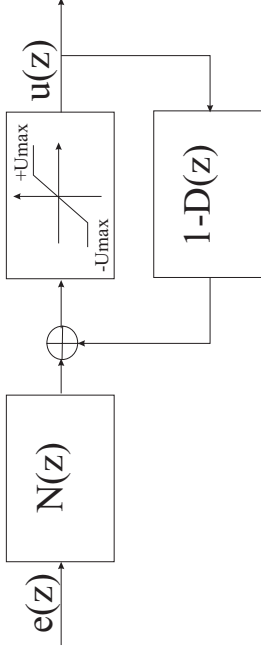
- La saturazione sull'uscita non impedisce alle variabili interne al controllore di raggiungere valori elevati.



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Metodo di antisaturazione (Corretto)



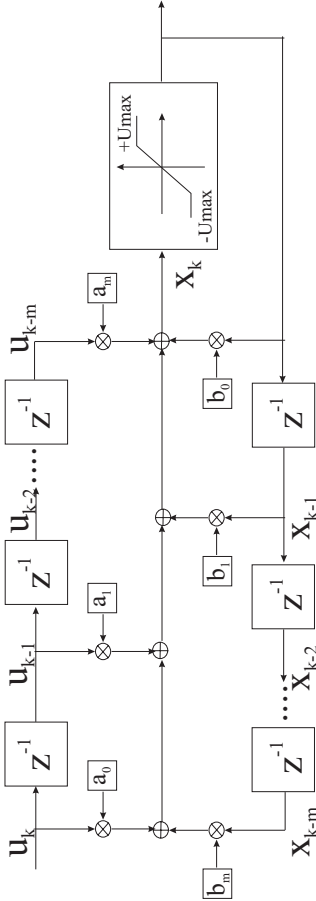
- In assenza di saturazione la funzione di trasferimento del sistema vale:
 $G(z) = N(z) \frac{1}{1-(1-D(z))} = \frac{N(z)}{D(z)}$
- La saturazione in questo caso agisce sulle variabili interne e quindi si evita che queste raggiungano valori elevati.



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Schema a blocchi della saturazione corretta



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Implementazione della saturazione

```
static float u[n],e[m];
static float a[n], b[m];

controllore(e[0])
{
    /* Algoritmo di controllo */
    u[0] = 1/b[m]*(-(b[m-1]*u[1] + ... + b[0]*u[m])) + ...
    ... + 1/b[m] * (a[n]*e[m-n] + a[n-1]*e[m-n+1]+... + a[0]*e[m]);
    /* Antisaturazione */
    u[0] = sat(u[0],Umax,Umin);
    /* Aggiornamento campioni precedenti */
    u[1]=u[0]; u[2]=u[1]; ... u[n]=u[n-1];
    e[1]=e[0]; e[2]=e[1]; ... e[m]=e[m-1];
    return(u[0])
}
```



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

La funzione di saturazione

```
sat(x,xMax,xmin)
{
    if (x>xMax)
        return(xMax);
    else if (x<xmin)
        return(xmin);
    else return(x);
}
```



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1, I-44100, Ferrara, Italia

Silvio Simani

Antisaturazione termine integrale del PID

