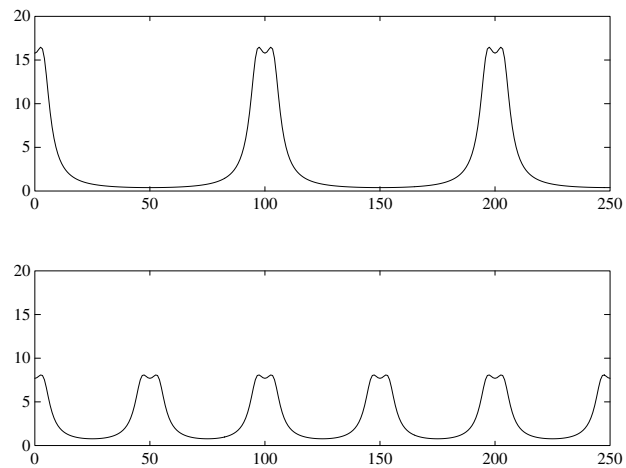


- Andamento spettrale di $G^*(j\omega)$ quando $T = \frac{\pi}{50}$ e $T = \frac{\pi}{25}$



Ricostruttori di segnale - relazione tra piano S e piano Z

Università di Ferrara, Dipartimento di Ingegneria
Via Saragat, 1, I-44100, Ferrara (FE)

Corso di Controllo Digitale

- Tipici ricostruttori di segnale

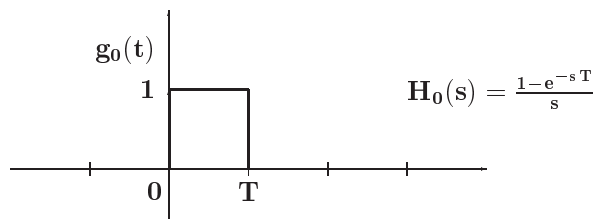


$$x(t) = x(kT) + \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=kT} (t - kT) + \left. \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \right|_{t=kT} \frac{(t - kT)^2}{2!} + \dots$$

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=kT} \simeq \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} \dots$$

- Ricostruttore di ordine zero

$$x_0(t) = x(kT) \quad kT \leq t < (k+1)T$$

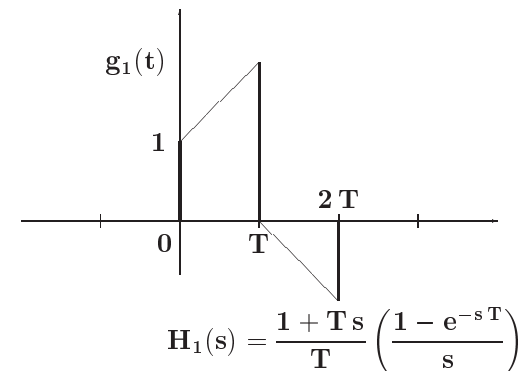


Università di Ferrara, Dipartimento di Ingegneria
Via Saragat, 1, I-44100, Ferrara (FE)

Corso di Controllo Digitale

- Ricostruttore di ordine uno

$$x_1(t) = x(kT) + \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} (t - kT)$$



Università di Ferrara, Dipartimento di Ingegneria
Via Saragat, 1, I-44100, Ferrara (FE)

Corso di Controllo Digitale

- La risposta frequenziale del ricostruttore di ordine zero:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_0(j\omega) &= \frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega} = \frac{2e^{-j\omega T/2}}{\omega} \frac{e^{j\omega T/2}-e^{-j\omega T/2}}{2j} \\ &= T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{-j\omega T/2}\end{aligned}$$

- Modulo

$$|\mathbf{H}_0(j\omega)| = T \left| \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right|$$

- Fase

$$\text{Arg}[\mathbf{H}_0(j\omega)] = \text{Arg}\left[\sin \frac{\omega T}{2}\right] - \frac{\omega T}{2}$$

Corrispondenza tra piano s e piano z

- $\mathbf{X}^*(s) = \mathbf{X}(z)|_{z=e^{sT}}$

- Le variabili complesse s e z sono legate dalla relazione

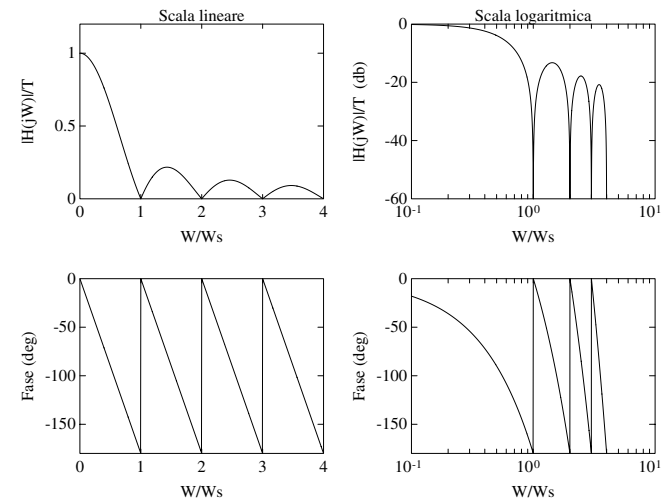
$$z = e^{sT}$$

- Posto $s = \sigma + j\omega$ si ha

$$z = e^{T(\sigma + j\omega)} = e^{T\sigma} e^{jT\omega} = e^{T\sigma} e^{jT(\omega + \frac{2k\pi}{T})}$$

- Ogni punto del piano z è in corrispondenza con infiniti punti del piano s

- Ricostruttore di ordine zero



- I punti del piano s a parte reale negativa ($\sigma < 0$) sono in corrispondenza con i punti del piano z all'interno del cerchio unitario:

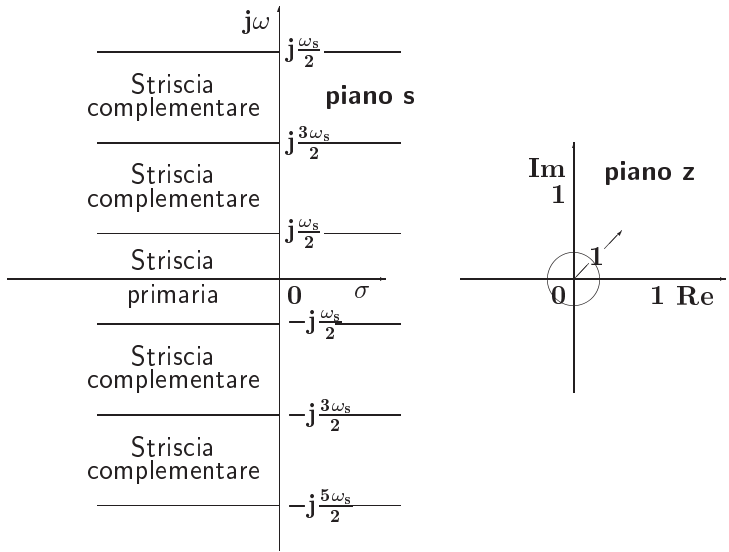
$$|z| = e^{T\sigma} < 1$$

- I punti sull'asse immaginario ($\sigma = 0$) vengono mappati sul cerchio unitario ($|z| = 1$), mentre quelli a parte reale positiva ($\sigma > 0$) vengono mappati all'esterno del cerchio unitario ($|z| > 1$).

- La striscia di piano s delimitata dalle rette orizzontali $s = j\omega_s/2$ e $s = -j\omega_s/2$ prende il nome di **striscia primaria**

Lezione 7

• Striscia primaria e Strisce complementari



- Le variabili complesse s e z sono legate dalla relazione

$$z = e^{sT}$$

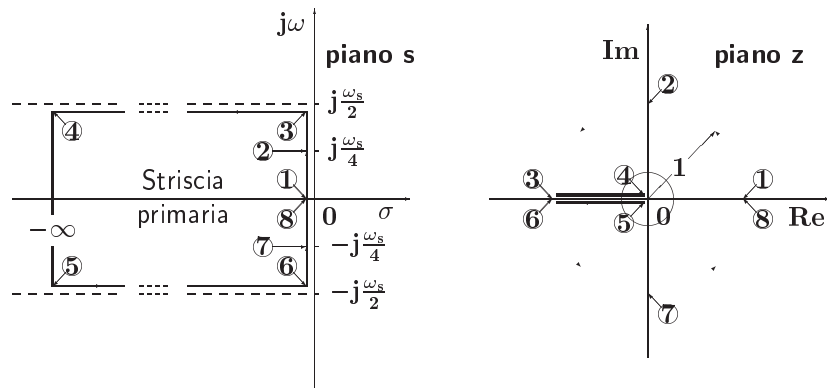
- Posto $s = \sigma + j\omega$ si ha

$$z = e^{T(\sigma + j\omega)} = e^{T\sigma} e^{jT\omega}$$

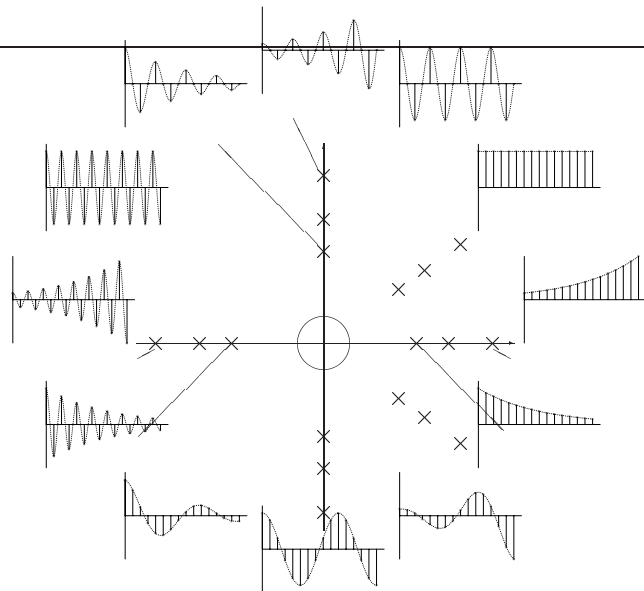
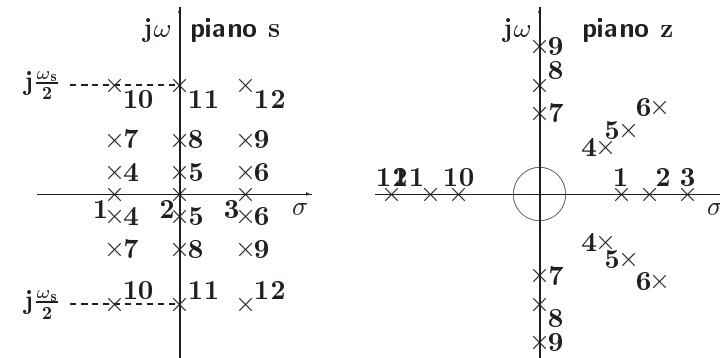
dove

$$0 \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$$

- Mapping tra striscia primaria e piano z

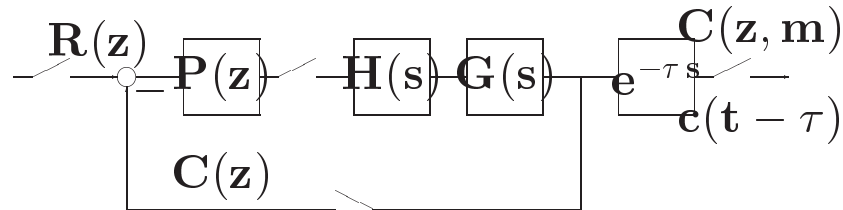


- I punti del piano s e del piano z , posti in corrispondenza per mezzo della relazione $z = e^{sT}$, possono essere considerati come poli corrispondenti di trasformate $F(s)$ ed $F(z)$, con $F(z)$ calcolata campionando $F(s)$



Lezione 10

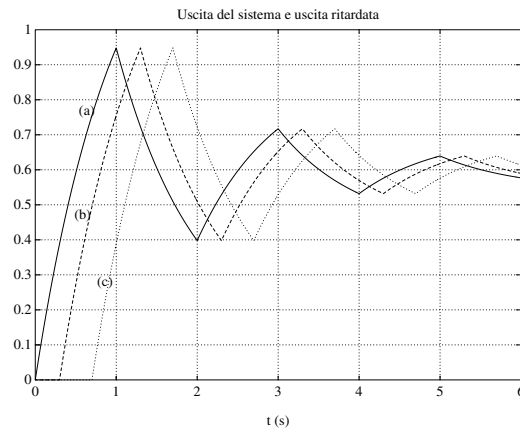
- Esempio: calcolo dell'uscita tra istanti di campionamento



- Con $P(z) = 1.5$, $G(s) = \frac{1}{s+1}$ e $T = 1$ s si ha

$$\frac{C(z, m)}{R(z)} = \frac{P(z) HG(z, m)}{1 + P(z) HG(z)}$$

$$C(z, m) = 1.5(1 - e^{-mT})z^{-1} + 1.5(0.58e^{-mT} + 0.1)$$



$$HG(z, m) = \frac{z^{-1}[(1 - e^{-mT}) + (e^{-mT} - e^{-T})z^{-1}]}{1 - e^{-T}z^{-1}}$$

$$HG(z) = \frac{(1 - e^{-T})z^{-1}}{1 - e^{-T}z^{-1}}$$

$$\frac{C(z, m)}{R(z)} = \frac{1.5 z^{-1} [(1 - e^{-mT}) + (e^{-mT} - e^{-T})z^{-1}]}{1 + 0.58z^{-1}}$$

- Nel caso in cui $R(z)$ sia un gradino unitario:

$$C(z, m) = \frac{1.5 z^{-1} [(1 - e^{-mT}) + (e^{-mT} - e^{-T})z^{-1}]}{1 - 0.42 z^{-1} - 0.58 z^{-2}}$$

- Stabilità dei sistemi discreti

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

- Stabilità semplice
- Stabilità asintotica
- Stabilità ingresso limitato - uscita limitata

- Il comportamento dinamico di un sistema

$$\mathbf{G}(z) = \frac{\mathbf{B}(z)}{\mathbf{A}(z)}$$

dipende dai poli di $\mathbf{G}(z)$, cioè dalle radici del polinomio $\mathbf{A}(z)$.

- Esempio

$$\mathbf{G}(z) = \frac{4z^{-1}}{1 + az^{-1}} = \frac{4}{z + a}$$

in risposta a

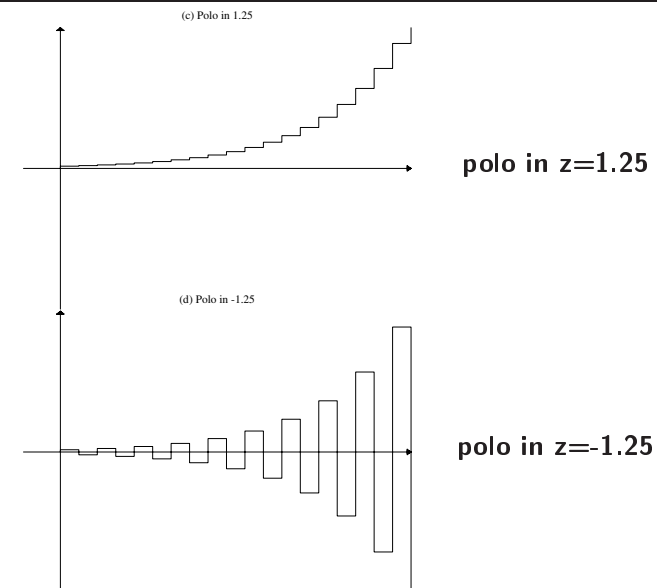
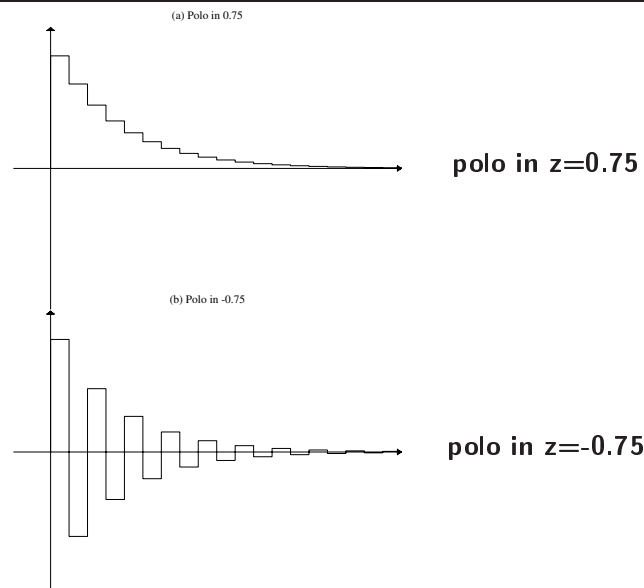
$$u(0) = 1, \quad u(k) = 0, \quad k > 0;$$

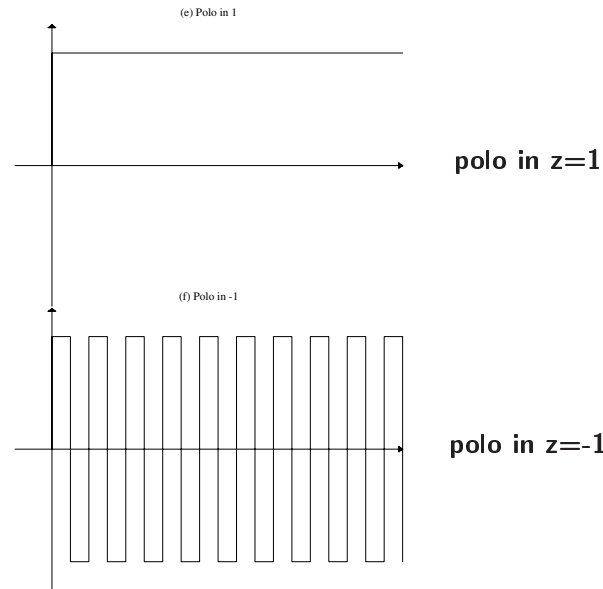
in corrispondenza ai valori $a = 0.75$, $a = -0.75$, $a = 1.25$, $a = -1.25$, $a = 1$, $a = -1$

$$\mathbf{Y}(z)(1 + az^{-1}) = 4z^{-1}\mathbf{U}(z)$$

$$y(k) = -ay(k-1) + 4u(k-1)$$

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(1) &= 4u(0) = 4 \\ y(2) &= -ay(1) + 4u(1) = -4a \\ y(3) &= -ay(2) + 4u(2) = 4a^2 \\ y(4) &= -ay(3) + 4u(3) = -4a^3 \\ y(5) &= -ay(4) + 4u(4) = 4a^4 \\ &\dots \\ y(k) &= -ay(k-1) + 4u(k-1) = 4(-a)^{k-1} \end{aligned}$$

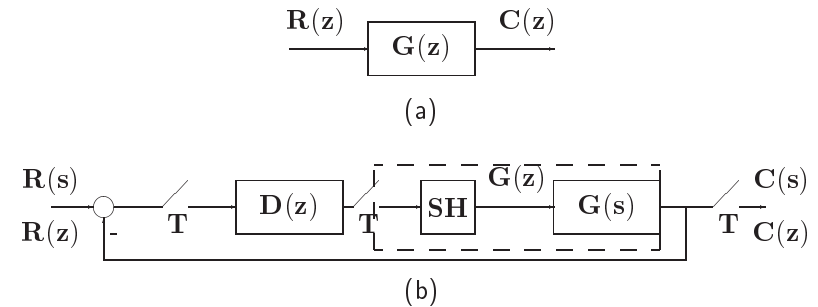




- Sia dato un sistema descritto da

$$\mathbf{G}(z) = \frac{\mathbf{B}(z)}{\mathbf{A}(z)} \quad \text{oppure} \quad \mathbf{G}_0(z) = \frac{\mathbf{D}(z)\mathbf{G}(z)}{1 + \mathbf{D}(z)\mathbf{G}(z)}$$

- Il sistema è asintoticamente stabile se e solo se tutte le radici del polinomio $\mathbf{A}(z)$ (o del polinomio $1 + \mathbf{D}(z)\mathbf{G}(z)$), cioè i poli del sistema, sono entro il cerchio di raggio unitario con centro nell'origine del piano z ossia $|\mathbf{p}_i| < 1, \forall i$.
- Il sistema è stabile se tutti i poli a modulo unitario $|\mathbf{p}_i| = 1$ sono poli semplici (la loro molteplicità è 1), mentre tutti i rimanenti poli sono entro il cerchio unitario.



$$\mathbf{G}_0(z) = \frac{\mathbf{D}(z)\mathbf{G}(z)}{1 + \mathbf{D}(z)\mathbf{G}(z)}$$

- Si deve risolvere una equazione polinomiale:

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

la cui soluzione è agevole solo per piccoli valori di n

- Tre metodi:

1. utilizzare una trasformazione bilineare ed applicare il criterio di Routh-Hurwitz;
2. utilizzare il criterio di Jury che elabora direttamente i coefficienti di $\mathbf{A}(z)$, cioè del denominatore di $\mathbf{G}(z)$
3. criterio di Nyquist

- Trasformazione bilineare e criterio di Routh-Hurwitz

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \frac{1+\mathbf{w}}{1-\mathbf{w}} \\ \mathbf{w} &= \frac{\mathbf{z}-1}{\mathbf{z}+1} \end{aligned}$$

- Il cerchio unitario in \mathbf{z} corrisponde al semipiano sinistro del piano \mathbf{w} e viceversa

- Per l'analisi della stabilità di una funzione $\mathbf{G}(\mathbf{z})$ ($\mathbf{G}_0(\mathbf{z})$) si procede come segue:
 - si considera l'equazione caratteristica

$$\mathbf{P}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^n + \mathbf{a}_1 \mathbf{z}^{n-1} + \dots + \mathbf{a}_{n-1} \mathbf{z} + \mathbf{a}_n = 0$$

- si effettua la trasformazione

$$\left(\frac{1+\mathbf{w}}{1-\mathbf{w}}\right)^n + \mathbf{a}_1 \left(\frac{1+\mathbf{w}}{1-\mathbf{w}}\right)^{n-1} + \dots + \mathbf{a}_{n-1} \frac{1+\mathbf{w}}{1-\mathbf{w}} + \mathbf{a}_n = 0$$

da cui si ottiene

$$\mathbf{Q}(\mathbf{w}) = \mathbf{q}_0 \mathbf{w}^n + \mathbf{q}_1 \mathbf{w}^{n-1} + \dots + \mathbf{q}_{n-1} \mathbf{w} + \mathbf{q}_n = 0$$

- applicando il criterio di Routh-Hurwitz, si studiano quindi i segni delle radici di $\mathbf{Q}(\mathbf{w})$

$$\bullet \quad |\mathbf{z}| = \left| \frac{1+\mathbf{w}}{1-\mathbf{w}} \right| = \left| \frac{1+\sigma+\mathbf{j}\omega}{1-\sigma-\mathbf{j}\omega} \right| < 1$$

$$\frac{(1+\sigma)^2 + \omega^2}{(1-\sigma)^2 + \omega^2} < 1$$

$$(1+\sigma)^2 + \omega^2 < (1-\sigma)^2 + \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma < 0$$

$$\bullet \quad |\mathbf{z}| = 1$$

$$(1+\sigma)^2 + \omega^2 = (1-\sigma)^2 + \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 0$$

- Esempio:

$$\mathbf{G}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{z} + 1}{\mathbf{z}^3 + 2\mathbf{z}^2 + \mathbf{z} + 1}$$

$$\left(\frac{1+\mathbf{w}}{1-\mathbf{w}}\right)^3 + 2\left(\frac{1+\mathbf{w}}{1-\mathbf{w}}\right)^2 + \frac{1+\mathbf{w}}{1-\mathbf{w}} + 1 = 0$$

$$-\mathbf{w}^3 + 3\mathbf{w}^2 + \mathbf{w} + 5 = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 8/3 & \\ 0 & 5 & \end{array}$$

- Il sistema ha un polo instabile

- Criterio di Jury

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

con $a_0 > 0$. La tabella di Jury è la seguente:

	z^0	z^1	z^2	\dots	z^{n-1}	z^n
1	a_n	a_{n-1}	\dots	a_2	a_1	a_0
2	a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-1}	a_n
3	b_{n-1}	b_{n-2}	\dots	b_1	b_0	
4	b_0	b_1	\dots	b_{n-2}	b_{n-1}	
5	c_{n-2}	\dots	c_1	c_0		
6	c_0	c_1	\dots	c_{n-2}		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		
$2n-5$	p_3	p_2	p_1	p_0		
$2n-4$	p_0	p_1	p_2	p_3		
$2n-3$	q_2	q_1	q_0			

- Gli elementi delle righe dispari da 3 a $(2n-3)$ sono i seguenti determinanti

$$b_k = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1-k} \\ a_0 & a_{k+1} \end{vmatrix} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-2-k} \\ b_0 & b_{k+1} \end{vmatrix} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-2$$

$$\vdots$$

$$q_k = \begin{vmatrix} p_3 & p_{2-k} \\ p_0 & p_{k+1} \end{vmatrix} \quad k = 0, 1, 2$$

- Gli elementi delle righe pari sono semplicemente gli elementi delle righe dispari in ordine opposto

- Affinchè il sistema sia stabile:

1. $|a_n| < a_0$;
2. $P(z)|_{z=1} > 0$;
3. $P(z)|_{z=-1} = \begin{cases} > 0 & n \text{ pari} \\ < 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$
4. $|b_{n-1}| > |b_0|$,
 $|c_{n-2}| > |c_0|$,
 \vdots
 $|q_2| > |q_0|$

- Esempio:

$$P(z) = z^3 + 2z^2 + z + 1$$

1. $|1| < 1$, non verificata;
2. $P(1) = 5$, verificata;
3. $P(-1) = 1 \not< 0$, non verificata.

- Il sistema risulta instabile

- Esempio:

$$P(z) = z^4 + 1.4z^3 + 0.71z^2 + 0.154z + 0.012$$

In questo caso i coefficienti sono $a_0 = 1$, $a_1 = 1.4$, $a_2 = 0.71$, $a_3 = 1.154$, $a_4 = 0.012$, e le condizioni per il test di Jury divengono

1. $0.012 < 1$;
2. $P(1) = 3.276 > 0$;
3. $P(-1) = 0.1680 > 0$ ($n = 4$ pari);

Lezione 11

4. la tabella di Jury è la seguente:

1	0.012	0.154	0.710	1.400	1.000
2	1.000	1.400	0.710	0.154	0.012
3	-1.000	-1.398	-0.701	-0.137	
4	-0.137	-0.701	-1.398	-1.000	
5	0.981	1.302	0.510		

e quindi

$$1 > 0.137$$

$$0.981 > 0.51$$

- Tutte le condizioni sono rispettate e quindi si può concludere che il sistema è stabile

- Esempio:

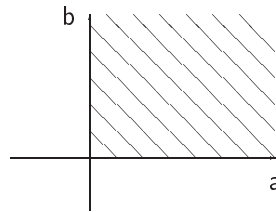
$$P(z) = z^3 - 1.5z^2 - 0.1z + 0.5$$

In questo caso i coefficienti sono $a_0 = 1$, $a_1 = -1.5$, $a_2 = -0.1$, $a_3 = 0.5$, e le condizioni per il test di Jury diventano

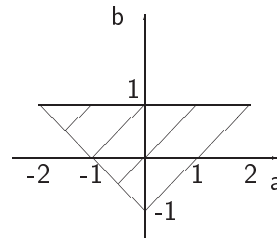
1. $0.5 < 1$
2. $P(1) = -0.1 \not> 0$

Essendo non soddisfatta questa condizione, risulta inutile proseguire il test: il sistema risulta instabile

- Esempio: $P(z) = z^2 + az + b = 0$



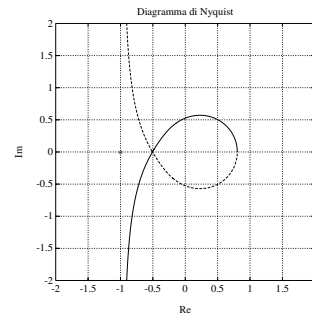
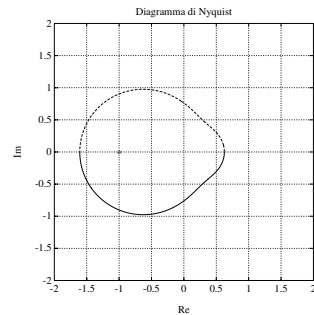
(a)



(b)

- $|b| < 1$
- $P(1) = 1 + a + b > 0$, cioè $b > -a - 1$
- $P(-1) = 1 - a + b > 0$, cioè $b > a - 1$

- Se la $G(z)$ è di tipo 0, allora il diagramma relativo è una curva chiusa; se è di tipo 1 o 2, allora si ha una curva aperta, che viene chiusa con una circonferenza o semicirconferenza all'infinito percorsa in senso orario



- Il **criterio di Nyquist** permette di decidere circa la stabilità di sistemi in retroazione analizzando il comportamento frequenziale della risposta armonica di anello in rapporto al **punto critico** $(-1 + j0)$

$$G(e^{j\omega T}), \quad -\frac{\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$$

• Criterio di Nyquist I

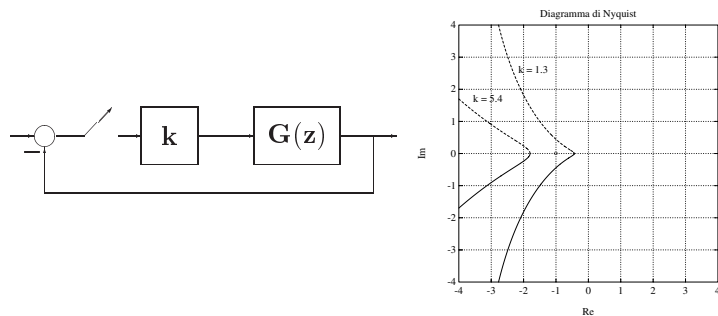
Sia data una funzione di guadagno d'anello $G(z)$ con tutti i poli stabili (a modulo minore di uno), con l'eventuale eccezione di un polo semplice o doppio in $z = 1$. Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $G(e^{j\omega T})$ tracciato per $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$ non circonda nè tocchi il punto critico $-1 + j0$

• Criterio di Nyquist II

Sia data una funzione di guadagno d'anello $G(z)$ senza poli a modulo unitario, con l'eventuale eccezione di un polo semplice o doppio in $z = 1$. Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $G(e^{j\omega T})$ tracciato per $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$ circonda il punto critico $-1 + j0$ tante volte in senso antiorario quanti sono i poli di $G(z)$ con modulo maggiore di uno. Ogni giro in meno in senso antiorario, oppure ogni giro in più in senso orario, corrisponde alla presenza di un polo a modulo maggiore di uno nel sistema in retroazione

• Esempio:

$$G(z) = \frac{z}{(z-1)(z-0.5)}$$



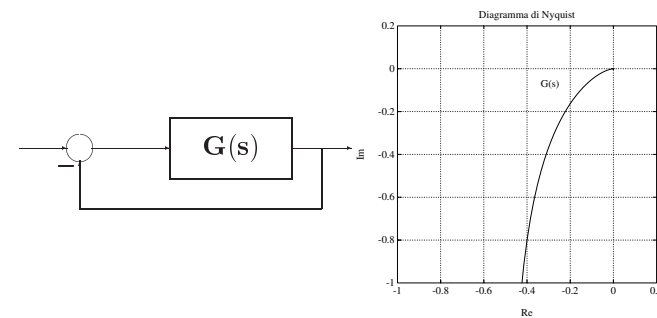
- Si ha stabilità per il sistema in retroazione con $k = 1.3$ ed instabilità con $k = 5.4$

• Criterio di Nyquist (enunciato generale)

Condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema in retroazione con guadagno di anello $G(z)$ sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare della funzione $G(e^{j\omega T})$ tracciato per $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$ circonda il punto critico $-1 + j0$ per tanti giri al finito in senso antiorario quanti sono i poli di $G(z)$ a modulo maggiore di uno, e per tanti mezzi giri al finito in senso antiorario quanti sono i poli a modulo unitario

• Esempio

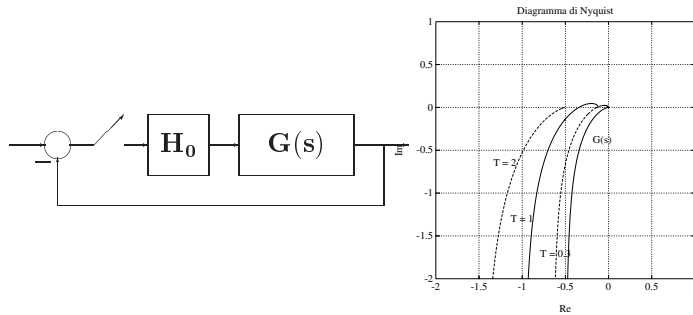
$$G(s) = \frac{2}{s(s+2)}$$



- Il sistema è stabile

- Si desidera ora studiare la stabilità del sistema in retroazione con campionamento di periodo T e ricostruttore di ordine zero

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}[H_0(s)G(s)] = \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s} \frac{2}{s(s+2)}\right] \\ &= \frac{(2T-1+e^{-2T})z + (1-e^{-2T}-2Te^{-2T})}{2(z-1)(z-e^{-2T})} \end{aligned}$$



- Luogo delle radici
È il luogo descritto dagli zeri di una funzione

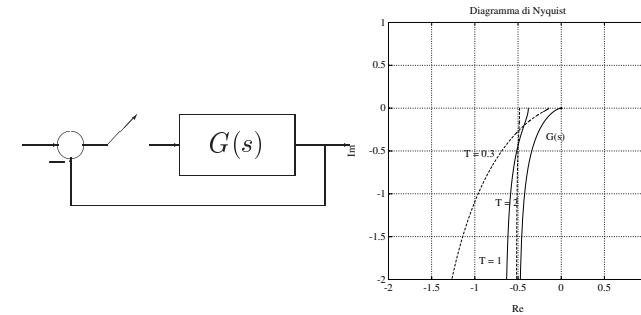
$$F(s) = 1 + k G(s) = 1 + k \frac{B(s)}{A(s)}$$

al variare del parametro k nell'intervallo $[0, +\infty]$

- Per il tracciamento del luogo valgono le stesse regole del caso continuo
- Cambia l'interpretazione dei risultati che si ottengono

- Senza ricostruttore:

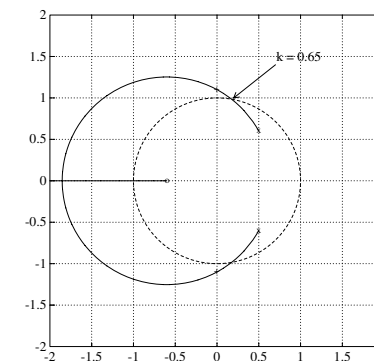
$$G'(z) = \mathcal{Z}[G(s)] = \frac{z(1-e^{-2T})}{(z-1)(z-e^{-2T})}$$



- Esempio. Dato il seguente sistema in catena aperta con due poli in $z_{1,2} = 0.5 \pm j0.6$:

$$G(z) = k \frac{z + 0.6}{z^2 - z + 0.61}$$

Per il sistema in retroazione unitaria



- Per il calcolo del massimo valore di k compatibile con la stabilità, si applica Jury

$$\begin{aligned} F(z) &= 1 + k \frac{z+0.6}{z^2-z+0.61} \\ &= \frac{z^2 + (k-1)z + 0.6k + 0.61}{z^2 - z + 0.61} \end{aligned}$$

e quindi:

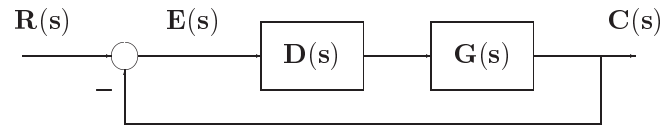
1. $|0.6k + 0.61| < 1, \Rightarrow k < 0.65$
2. $P(1) = 1 + k - 1 + 0.6k + 0.61 = 1.6k + 0.61 > 0, \Rightarrow k > -0.38$
3. $P(-1) = 1 - k + 1 + 0.6k + 0.61 = 2.61 - 0.4k > 0, \Rightarrow k < 6.525$

- Specifiche di progetto di sistemi di controllo
- Specifiche che il sistema deve soddisfare, in condizioni **statiche** (o di **regime**) e durante i **transitori**:
 - **Precisione a regime**: ci si riferisce con questa alla capacità di un sistema di seguire alcuni segnali di riferimento con il minimo errore
 - **Risposta nel transitorio**: ci si riferisce all'andamento per tempi finiti dell'uscita del sistema in retroazione in risposta a segnali tipici in ingresso

Lezione 12

- **Stabilità relativa**: ci si riferisce ai margini di stabilità
- **Sensitività parametrica**: ci si riferisce al fatto che le prestazioni del sistema non vengano alterate dalle variazioni di certi parametri
- **Reiezione di disturbi**: cioè la capacità del sistema controllato di ridurre al minimo l'influenza sull'uscita di eventuali disturbi che entrano nell'anello di controllo
- **Sforzo di controllo**: ci si riferisce all'ampiezza massima della variabile manipolabile $v(t)$, o sull'energia entrante nel sistema

- Errori a regime (caso continuo)

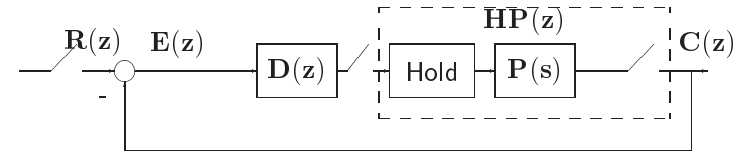


$$G(s) = \frac{K(1 + q_1s)(1 + q_2s) \dots (1 + q_ms)}{s^N(1 + p_1s)(1 + p_2s) \dots (1 + p_ps)}$$

- Assumendo che il sistema sia stabile, l'errore a regime può essere calcolato mediante il teorema del valore finale:

$$\begin{aligned} e_{\text{reg}} = \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) &= \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1})E(z)] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + G(z)} R(z) \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{z-1}{z} \frac{1}{1 + G(z)} R(z) \right] \end{aligned}$$

- Errori a regime (caso discreto)
- Nel caso discreto la corrispondente definizione di tipo si riferisce al numero di poli nel punto $z = 1$



$$G(z) = D(z)HP(z) = D(z)(1 - z^{-1})Z \left[\frac{P(s)}{s} \right]$$

$$E(z) = \frac{1}{1 + G(z)} R(z)$$

- Errore di posizione

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{r_0}{1 - z^{-1}} \\ e_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + G(z)} \frac{r_0}{1 - z^{-1}} \right] &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{r_0}{1 + G(z)} \right] \end{aligned}$$

- Definendo $k_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)$ **costante di posizione**

$$e_p = \frac{r_0}{1 + k_p}$$

- **Errore di velocità**

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(z) &= \frac{\mathbf{T}z^{-1}\mathbf{r}_0}{(1-z^{-1})^2} \\ \mathbf{e}_v &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1-z^{-1}) \frac{1}{1+G(z)} \frac{\mathbf{T}z^{-1}\mathbf{r}_0}{(1-z^{-1})^2} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{\mathbf{T}\mathbf{r}_0}{(1-z^{-1})G(z)} \right] \end{aligned}$$

- Definendo $\mathbf{k}_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z^{-1})G(z)}{\mathbf{T}}$ **costante di velocità**

$$\mathbf{e}_v = \frac{\mathbf{r}_0}{\mathbf{k}_v}$$

- **Esempio**

$$G(z) = \frac{z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$$

con $\mathbf{T} = 0.25$ s

$$\mathbf{k}_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = 2$$

$$\mathbf{e}_p = \frac{1}{1+2} = \mathbf{0.333}$$

$$\mathbf{k}_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z^{-1})G(z)}{\mathbf{T}} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{e}_v = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\mathbf{k}_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z^{-1})^2 G(z)}{\mathbf{T}^2} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{e}_a = \frac{1}{0} = \infty$$

- **Errore di accelerazione**

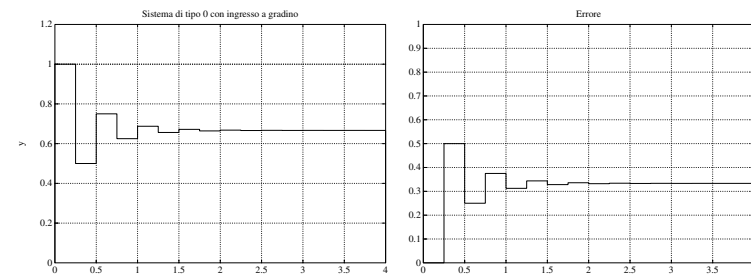
$$\mathbf{R}(z) = \frac{\mathbf{T}^2 z^{-1} (1+z^{-1}) \mathbf{r}_0}{2(1-z^{-1})^3}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_a &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1-z^{-1}) \frac{1}{1+G(z)} \frac{\mathbf{T}^2 z^{-1} (1+z^{-1}) \mathbf{r}_0}{2(1-z^{-1})^3} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{\mathbf{T}^2 \mathbf{r}_0}{(1-z^{-1})^2 G(z)} \right] \end{aligned}$$

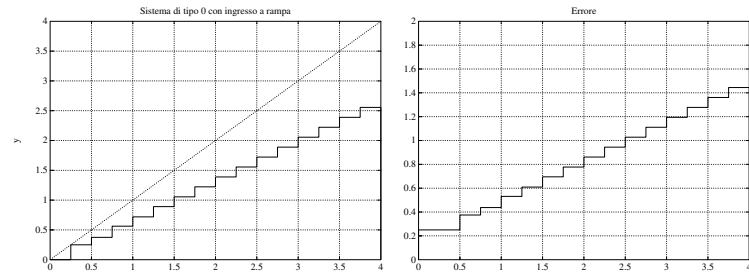
- Definendo $\mathbf{k}_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z^{-1})^2 G(z)}{\mathbf{T}^2}$ **costante di accelerazione**

$$\mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{r}_0}{\mathbf{k}_a}$$

- **Errore di posizione**



- Errore di velocità



- Esempio

$$G(z) = \frac{0.3z^{-2}}{1 - 1.2z^{-1} + 0.2z^{-2}} = \frac{0.3z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.2z^{-1})}$$

con $T = 1$ s. Il sistema è ora di tipo 1

$$k_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \infty$$

$$e_p = 0$$

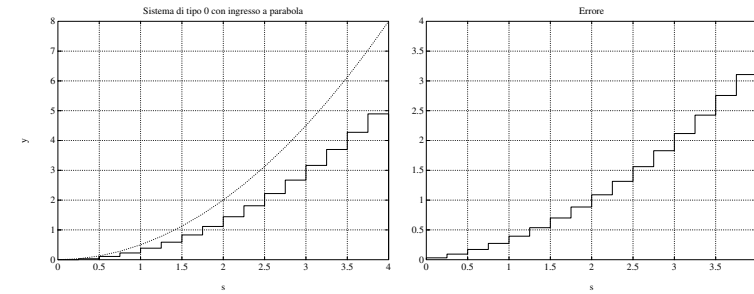
$$k_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})G(z)}{T} = 0.75$$

$$e_v = 1.333$$

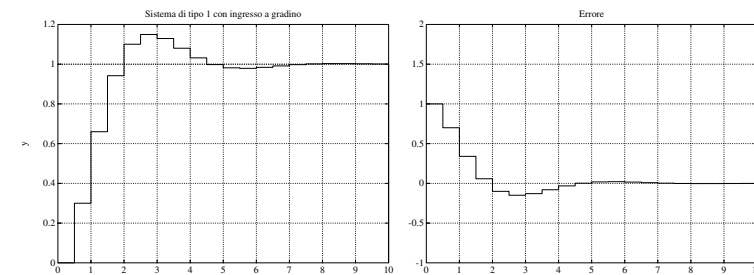
$$k_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})^2 G(z)}{T^2} = 0$$

$$e_a = \infty$$

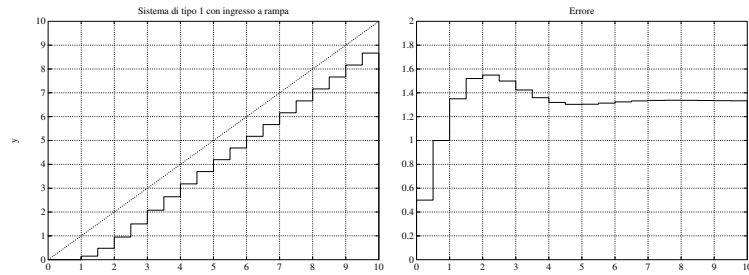
- Errore di accelerazione



- Errore di posizione



- Errore di velocità



- Esempio

$$G(z) = \frac{0.3(1 - 1.2z^{-1} + 0.37z^{-2})}{(1 - z^{-1})^2(1 - 0.6z^{-1})}$$

con $T = 1$ s. Il sistema è di tipo 2

$$k_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \infty$$

$$e_p = 0$$

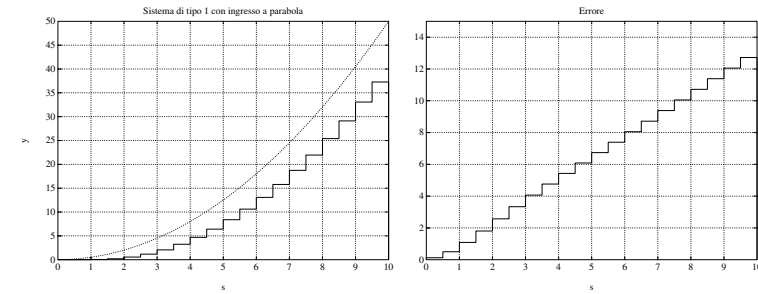
$$k_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})G(z)}{T} = \infty$$

$$e_v = 0$$

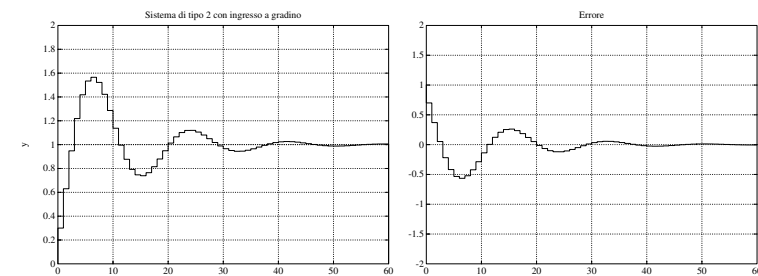
$$k_a = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1})^2 G(z)}{T^2} = 0.1275$$

$$e_a = 7.843$$

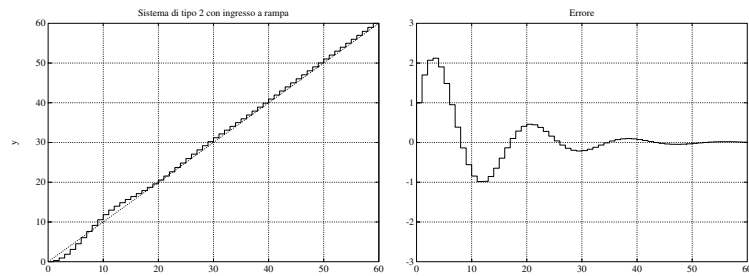
- Errore di accelerazione



- Errore di posizione



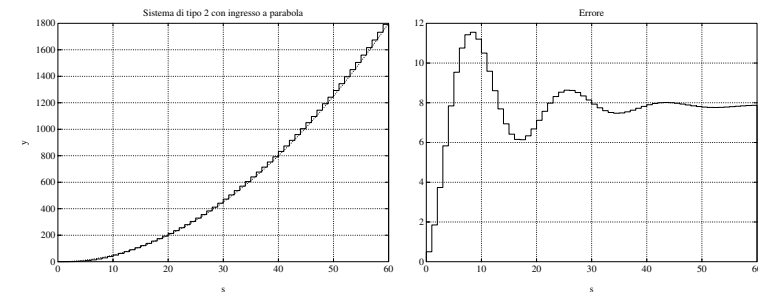
- Errore di velocità



- Errori a regime in funzione del tipo di sistema

Tipo di sistema	Errore a regime in risposta a:		
	gradino	rampa	parabola
Tipo 0	$\frac{1}{1+k_p}$	∞	∞
Tipo 1	0	$\frac{1}{k_v}$	∞
Tipo 2	0	0	$\frac{1}{k_a}$

- Errore di accelerazione



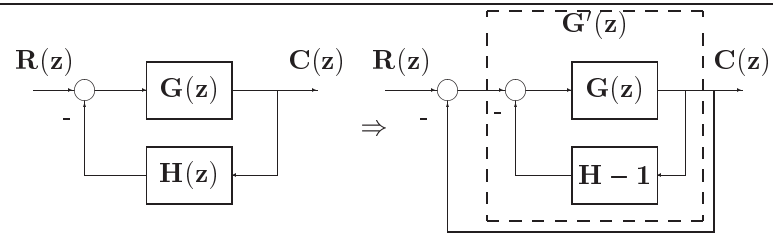
- Caso di sistema in retroazione non unitaria

- Si è ancora interessati alla differenza $\mathbf{E}(z) = \mathbf{R}(z) - \mathbf{C}(z)$

- Si applicano le stesse formule con

$$\mathbf{G}'(z) = \frac{\mathbf{G}(z)}{1 + \mathbf{G}(z) [\mathbf{H}(z) - 1]}$$

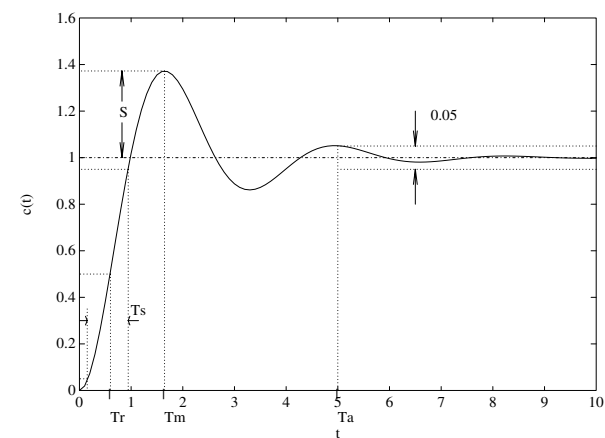
anzichè $\mathbf{G}(z)$. Infatti



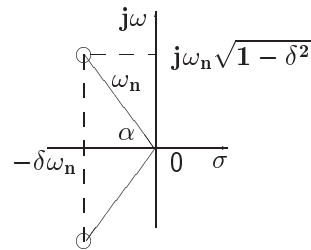
- Specifiche sul transitorio
- Nel caso tempo-continuo, si definiscono le seguenti caratteristiche temporali della risposta a gradino:
 - Tempo di salita T_s
 - Tempo di assestamento T_a
 - Tempo di ritardo T_r
 - Massimo sorpasso o massima sovraelongazione S
 - Istante di massima sovraelongazione T_m

Lezione 13

- Risposta di un sistema di secondo ordine



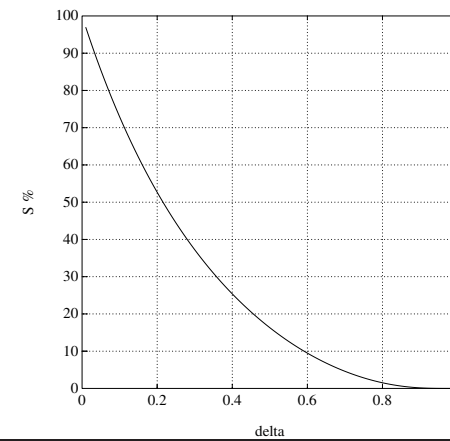
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$



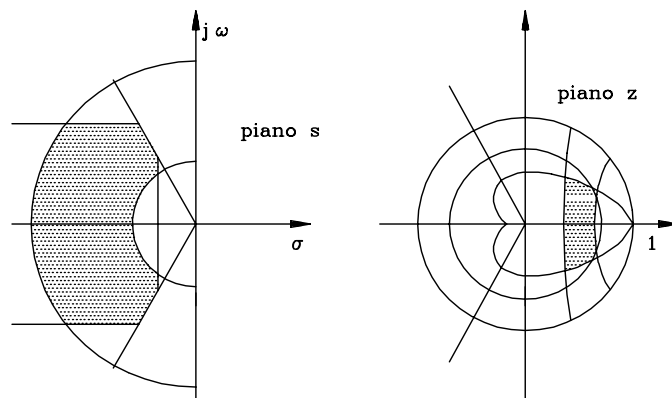
- Tempo da 0 al 100% del V.F.: $T_1 = \frac{\pi - \arccos \delta}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}}$
- Istante di massimo sorpasso: $T_m = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}}$
- Tempo di assestamento: $T_a = \frac{3}{\delta \omega_n}$ (al 5 %), $T_a = \frac{4}{\delta \omega_n}$ (al 2 %)

- Massimo sorpasso percentuale:

$$S = 100[c(T_m) - 1] = 100 e^{-\frac{\delta \pi}{\sqrt{1 - \delta^2}}}$$



- Posizione dei poli



- Specifiche frequenziali

- **Margine di fase** M_F : detto $-\phi$ l'argomento di $G(e^{j\omega T})$ in corrispondenza della pulsazione ω_0 per la quale $|G(e^{j\omega_0 T})| = 1$, il margine di fase M_F è il complemento a π di ϕ , cioè

$$M_F = \pi - \phi$$

Tipici valori di specifica sono $45^\circ \div 60^\circ$

- **Margine di ampiezza** M_A : è l'inverso del guadagno di anello alla pulsazione ω' a cui corrisponde la fase π :

$$M_A = \frac{1}{|G(e^{j\omega'/T})|}$$

dove $\arg\{G(e^{j\omega'/T})\} = \pi$

Valori usuali di specifica per questo parametro sono 4-6 (12-16 db)

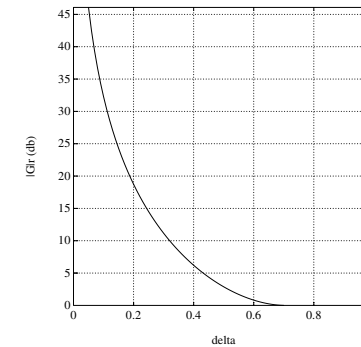
- **Pulsazione di risonanza** ω_r : pulsazione alla quale si verifica il picco di risonanza:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2}$$

- **Banda passante** ω_b : pulsazione alla quale il modulo della funzione di risposta armonica si riduce di 3 db rispetto al valore del modulo per $\omega = 0$.
- Si ricorre spesso all'utilizzo del piano ausiliario \mathbf{w} che gode della stessa proprietà del piano s di trattare con funzioni razionali fratte in ω . È dunque su questo piano \mathbf{w} che si utilizzano in pratica le suddette specifiche per il progetto di semplici regolatori digitali (reti correttrici)

- **Picco di risonanza** $|G_r|$: massimo valore che assume il modulo di $|G(e^{j\omega T})|$ al variare di ω , è funzione del coefficiente di smorzamento. Espresso solitamente in decibel ha valori tipici di 2-3 db;

$$|G|_r = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$$



- Sensitività parametrica

$$G_0(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)}$$

- Sensitività ad un parametro a

$$\Sigma_a^{G_0} \approx \frac{\Delta G_0 / G_0}{\Delta a / a} = \frac{\Delta G_0}{\Delta a} \frac{a}{G_0}$$

- Facendo il limite per $\Delta a \rightarrow 0$

$$\Sigma_a^{G_0} = \frac{\delta G_0}{\delta a} \frac{a}{G_0}$$

- Sensitività di \mathbf{G}_0 rispetto a \mathbf{G}

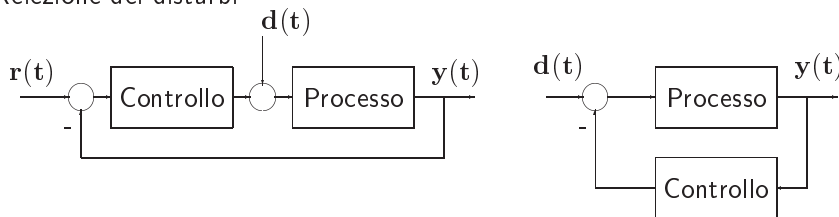
$$\Sigma_{\mathbf{G}}^{\mathbf{G}_0} = \frac{\delta \mathbf{G}_0}{\delta \mathbf{G}} \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{G}_0} = \frac{1}{1 + \mathbf{G}(\mathbf{z})}$$

e, valutandola ad una data pulsazione ω

$$\Sigma_{\mathbf{G}}^{\mathbf{G}_0} = \frac{1}{1 + \mathbf{G}(e^{j\omega T})}$$

- Volendo che la sensitività sia piccola a date frequenze, è quindi necessario che per tali frequenze $\mathbf{G}(e^{j\omega T})$ sia grande. Un modo per ottenere questo risultato è quello di aumentare il guadagno d'anello, il che però comporta in genere riduzioni dei margini di stabilità

- Reiezione dei disturbi



$$\frac{\mathbf{Y}(\mathbf{z})}{\mathbf{D}(\mathbf{z})} = \mathbf{G}_d(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{H}\mathbf{G}(\mathbf{z})}{1 + \mathbf{C}(\mathbf{z})\mathbf{H}\mathbf{G}(\mathbf{z})}$$

essendo $\mathbf{C}(\mathbf{z})$ la funzione di trasferimento del controllore e $\mathbf{H}\mathbf{G}(\mathbf{z})$ quella del processo

- Se la $\mathbf{G}(\mathbf{z})$ dipende da un parametro \mathbf{a}

$$\Sigma_{\mathbf{a}}^{\mathbf{G}_0} = \frac{\delta \mathbf{G}_0}{\delta \mathbf{a}} \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{G}_0} = \frac{\delta \mathbf{G}_0}{\delta \mathbf{G}} \frac{\delta \mathbf{G}}{\delta \mathbf{a}} \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{G}_0}$$

da cui

$$\Sigma_{\mathbf{a}}^{\mathbf{G}_0} = \frac{\mathbf{a} \frac{\delta \mathbf{G}(\mathbf{z})}{\delta \mathbf{a}}}{\mathbf{G}(\mathbf{z})} \frac{1}{[1 + \mathbf{G}(\mathbf{z})]}$$

- Anche in questo caso, per ridurre la sensitività bisogna aumentare il guadagno d'anello

- Se

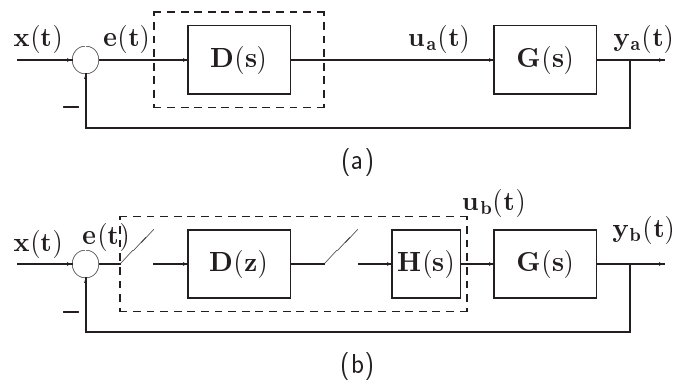
$$|\mathbf{C}(\mathbf{z})\mathbf{H}\mathbf{G}(\mathbf{z})| \gg 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Y}(\mathbf{z}) \approx \frac{\mathbf{D}(\mathbf{z})}{\mathbf{C}(\mathbf{z})}$$

l'entità del disturbo è ridotta di un fattore $\mathbf{C}(\mathbf{z})$

- Se $\mathbf{D}(\mathbf{z})$ è costante, allora un integratore in $\mathbf{C}(\mathbf{z})$ farà sì che a regime l'errore causato dal disturbo sia nullo
- Un disturbo ad una frequenza \mathbf{f}_d verrà attenuato se per quella frequenza $|\mathbf{C}(\mathbf{z})\mathbf{H}\mathbf{G}(\mathbf{z})| \gg 1$ oppure $|\mathbf{H}\mathbf{G}(\mathbf{z})| \ll 1$ e $|\mathbf{C}(\mathbf{z})\mathbf{H}\mathbf{G}(\mathbf{z})| \leq 1$

Lezione 14

- Metodo indiretto



- T il più piccolo possibile !?

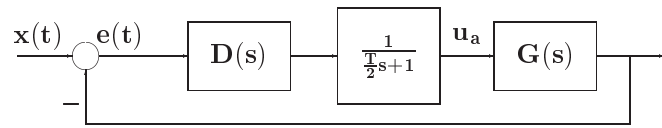
Progetto del controllore discreto

- Tre passi concettuali

1. Definizione di T e verifica dei margini di stabilità del sistema

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \approx \frac{T}{\frac{T}{2}s + 1}$$

$$H_0(s) \approx e^{-sT/2}$$



2. Discretizzazione della $D(s)$

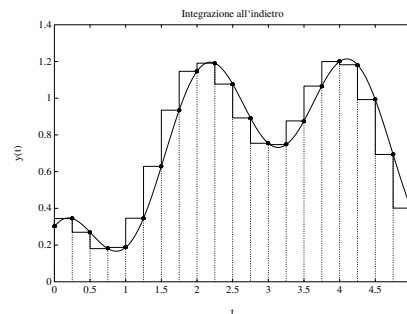
3. Verifica a posteriori (simulativa e sperimentale) del comportamento dinamico

• Tecniche di discretizzazione:

1. Metodo delle differenze all'indietro
2. Metodo delle differenze in avanti
3. Trasformazione bilineare
4. Trasformazione bilineare con precompensazione
5. Metodo della \mathcal{Z} -trasformata
6. Metodo della \mathcal{Z} -trasformata con ricostruttore di ordine 0
7. Metodo della corrispondenza poli/zeri

Metodo delle differenze all'indietro

$$D(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}}$$



Metodo delle differenze in avanti

$$D(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T}}$$

Trasformazione bilineare

- $\mathbf{D}(z) = \mathbf{D}(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$

- detta anche **integrazione trapezoidale** (o di di Tustin)

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(t) dt \approx \frac{[y(kT) + y((k-1)T)]T}{2}$$

$$\int_{(k-1)T}^{kT} x(t) dt \approx \frac{[x(kT) + x((k-1)T)]T}{2}$$

Lezione 15

- **Metodo della \mathcal{Z} -trasformata**

$$\mathbf{D}(z) = \mathcal{Z}[\mathcal{L}^{-1}[\mathbf{D}(s)]]$$

- Invarianza della risposta all'impulso
- Possibilità di aliasing
- Da $\mathbf{D}(s)$ stabili a $\mathbf{D}(z)$ stabili

- **Metodo della \mathcal{Z} -trasformata con ricostruttore di ordine 0** o dell'invarianza alla risposta al gradino

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\mathbf{D}(z)\frac{1}{1-z^{-1}}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathbf{D}(s)\frac{1}{s}\right] \Big|_{t=kT}$$

$$\mathbf{D}(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{\mathbf{D}(s)}{s}\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s}\mathbf{D}(s)\right]$$

- Possibilità di aliasing
- Da $\mathbf{D}(s)$ stabili a $\mathbf{D}(z)$ stabili

- **Metodo della corrispondenza poli/zeri**

- Si fattorizza numeratore e denominatore di $\mathbf{D}(s)$

- Trasformazione dei poli e zeri

$$(s + a) \rightarrow (1 - e^{-aT} z^{-1})$$

$$(s + a \pm j\mathbf{b}) \rightarrow (1 - 2e^{-aT} \cos \mathbf{bT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2})$$

- Si introducono zeri in $z = -1$ in numero pari al grado relativo
- Si aggiusta il guadagno alle basse ($z = 1$) o alle alte ($z = -1$) frequenze

- Esempio

$$\mathbf{D}(s) = \frac{s + \mathbf{b}}{s + \mathbf{a}}$$

$$\mathbf{D}(z) = \mathbf{k} \frac{z - e^{-\mathbf{bT}}}{z - e^{-\mathbf{aT}}}$$

$$\mathbf{D}(z = 1) = \mathbf{k} \frac{1 - e^{-\mathbf{bT}}}{1 - e^{-\mathbf{aT}}} = \mathbf{D}(s = 0) = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$$

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{b} 1 - e^{-\mathbf{aT}}}{\mathbf{a} 1 - e^{-\mathbf{bT}}}$$