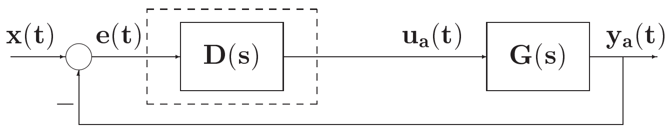
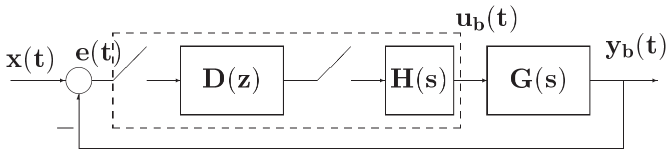
Lezione 14

Progetto del controllore discreto

- Metodo indiretto



(a)



(b)

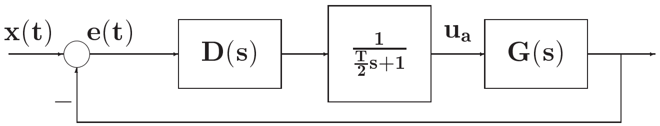
- $\mathbf{T}$ il più piccolo possibile !?

- Tre passi concettuali

1. Definizione di $\mathbf{T}$ e verifica dei margini di stabilità del sistema

$$\mathbf{H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \approx \frac{T}{\frac{T}{2}s + 1}}$$

$$\mathbf{H_0(s) \approx e^{-sT/2}}$$



2. Discretizzazione della $\mathbf{D(s)}$

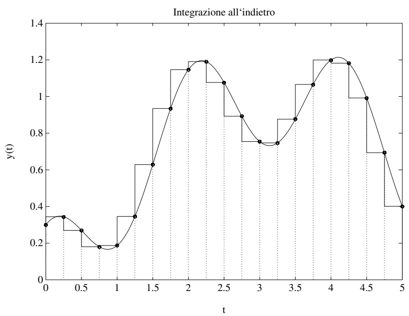
3. Verifica a posteriori (simulativa e sperimentale) del comportamento dinamico

- **Tecniche di discretizzazione:**

1. Metodo delle differenze all'indietro
2. Metodo delle differenze in avanti
3. Trasformazione bilineare
4. Trasformazione bilineare con precompensazione
5. Metodo della $\mathcal{Z}$-trasformata
6. Metodo della $\mathcal{Z}$-trasformata con ricostruttore di ordine 0
7. Metodo della corrispondenza poli/zeri

Metodo delle differenze all'indietro

$$\mathbf{D(z)} = \mathbf{D(s)}\big|_{\mathbf{s}=\frac{1-z^{-1}}{T}}$$



Metodo delle differenze in avanti

$$\mathbf{D(z)} = \mathbf{D(s)}\big|_{\mathbf{s}=\frac{z-1}{T}}$$

Trasformazione bilineare

- $\mathbf{D(z) = D(s)}\big|_{\mathbf{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}}$
- detta anche **integrazione trapezoidale** (o di di Tustin)

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(t)dt \approx \frac{[y(kT) + y((k-1)T)]T}{2}$$

$$\int_{(k-1)T}^{kT} x(t)dt \approx \frac{[x(kT) + x((k-1)T)]T}{2}$$

- **Metodo della $\mathcal{Z}$-trasformata**

$$\mathbf{D(z)} = \mathcal{Z}\big[\mathcal{L}^{-1}[\mathbf{D(s)}]\big]$$

- Invarianza della risposta all'impulso
- Possibilità di aliasing
- Da $\mathbf{D(s)}$ stabili a $\mathbf{D(z)}$ stabili

Lezione 15

- **Metodo della $\mathcal{Z}$-trasformata con ricostruttore di ordine 0** o dell'invarianza alla risposta al gradino

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\mathbf{D(z)}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1-z^{-1}}}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathbf{D(s)}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s}}\right]\Bigg|_{\mathbf{t=kT}}$$

$$\mathbf{D(z)} = (\mathbf{1-z^{-1}})\mathcal{Z}\left[\frac{\mathbf{D(s)}}{\mathbf{s}}\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{\mathbf{1-e^{-sT}}}{\mathbf{s}}\mathbf{D(s)}\right]$$

- Possibilità di aliasing
- Da $\mathbf{D(s)}$ stabili a $\mathbf{D(z)}$ stabili

- **Metodo della corrispondenza poli/zeri**

- Si fattorizza numeratore e denominatore di $\mathbf{D}(\mathbf{s})$

- Trasformazione dei poli e zeri

$$\begin{aligned}(\mathbf{s}+\mathbf{a}) &\rightarrow (\mathbf{1}-\mathbf{e}^{-\mathbf{aT}}\mathbf{z}^{-1}) \\ (\mathbf{s}+\mathbf{a}\pm\mathbf{jb}) &\rightarrow (\mathbf{1}-\mathbf{2e}^{-\mathbf{aT}}\cos\mathbf{bT}\mathbf{z}^{-1}+\mathbf{e}^{-\mathbf{2aT}}\mathbf{z}^{-2})\end{aligned}$$

- Si introducono zeri in $\mathbf{z}=-\mathbf{1}$ in numero pari al grado relativo

- Si aggiusta il guadagno alle basse $(\mathbf{z}=\mathbf{1})$ o alle alte $(\mathbf{z}=-\mathbf{1})$ frequenze

- Esempio

$$\mathbf{D}(\mathbf{s})=\frac{\mathbf{s}+\mathbf{b}}{\mathbf{s}+\mathbf{a}}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{z})=\mathbf{k}\frac{\mathbf{z}-\mathbf{e}^{-\mathbf{bT}}}{\mathbf{z}-\mathbf{e}^{-\mathbf{aT}}}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{z}=\mathbf{1})=\mathbf{k}\frac{\mathbf{1}-\mathbf{e}^{-\mathbf{bT}}}{\mathbf{1}-\mathbf{e}^{-\mathbf{aT}}}=\mathbf{D}(\mathbf{s}=\mathbf{0})=\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$$

$$\mathbf{k}=\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\frac{\mathbf{1}-\mathbf{e}^{-\mathbf{aT}}}{\mathbf{1}-\mathbf{e}^{-\mathbf{bT}}}$$

Università di Ferrara, Dipartimento di Ingegneria
Via Saragat, 1, I-44100, Ferrara (FE)
Corso di Controllo Digitale