Automatica I (Laboratorio)

Silvio Simani

Dipartimento di Ingegneria
Università di Ferrara
Tel. 0532 293844
Fax. 0532 768602

E-mail: ssimani@ing.unife.it

URL: http://www.ing.unife.it/simani

URL: http://www.ing.unife.it/simani/lessons.html

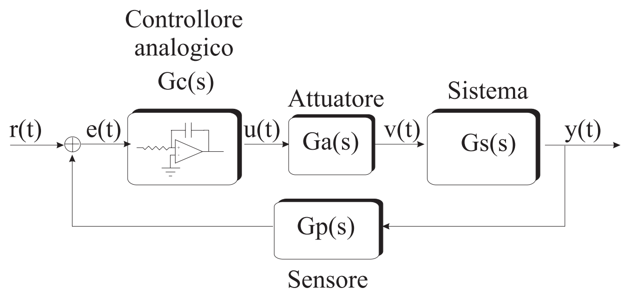
Schema delle lezioni.

- Schema logico di un controllore digitale.
- Introduzione al metodo di progetto per "discretizzazione".
- Metodi per l'analisi di successioni.
- Rappresentazione di sistemi lineari mediante equazioni alle differenze.
- Successioni ottenute da campionamento di segnale continuo.
- Il metodo di progetto per "discretizzazione".
- PID digitale.
- Metodi di antisaturazione.

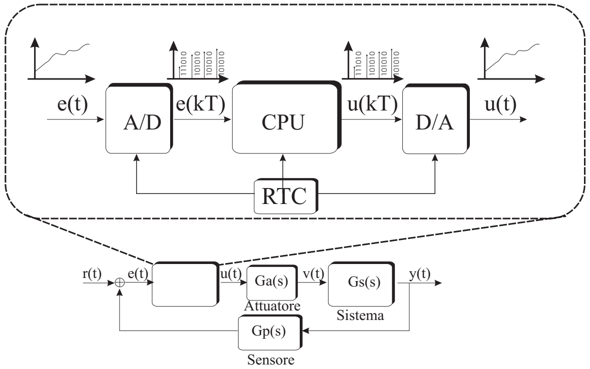
Argomento

⋙ **Schema logico di un controllore digitale.**
- Introduzione al metodo di progetto per "discretizzazione".
- Metodi per l'analisi di successioni.
- Rappresentazione di sistemi lineari mediante equazioni alle differenze.
- Successioni ottenute da campionamento di segnale continuo.
- Il metodo di progetto per "discretizzazione".
- PID digitale.
- Metodi di antisaturazione.

Schema logico di un controllore analogico



Schema logico di un controllore digitale.



Argomento

- Schema logico di un controllore digitale.

⋙ **Introduzione al metodo di progetto per "discretizzazione"**.

- Metodi per l'analisi di successioni.
- Rappresentazione di sistemi lineari mediante equazioni alle differenze.
- Successioni ottenute da campionamento di segnale continuo.
- Il metodo di progetto per "discretizzazione".
- PID digitale.
- Metodi di antisaturazione.

Introduzione al metodo di progetto per "discretizzazione"

1. Si conduce il progetto di un controllore a tempo continuo, ottenendo una funzione di trasferimento del tipo $G_c(s)$.
2. Si discretizza la funzione di trasferimento del controllore utilizzando un metodo di discretizzazione $z = f(s)$, ottenendo una funzione di trasferimento del tipo $G'_c(z)$.
3. Si implementa il controllore utilizzando una equazione alle differenze ottenuta dalla funzione di trasferimento.

$$u(z) = G'(z)e(z) \Rightarrow u(kT) = g(u(kT-T), \ldots, e(kT), e(kT-T), \ldots)$$

Argomento

- Schema logico di un controllore digitale.
- Introduzione al metodo di progetto per "discretizzazione".

⋙ **Metodi per l'analisi di successioni**.

- Rappresentazione di sistemi lineari mediante equazioni alle differenze.
- Successioni ottenute da campionamento di segnale continuo.
- Il metodo di progetto per "discretizzazione".
- PID digitale.
- Metodi di antisaturazione.

Metodi per l'analisi di successioni

- Successioni numeriche.
- Trasformata "zeta" di successioni.
- Proprietà delle "zeta" trasformate (ritardo temporale).
- Equazioni alle differenze lineari e loro trasformata.
- Funzioni di trasferimento.
- Proprietà della funzione di trasferimento.

Successioni numeriche.

- Definiamo Successione numerica la successione infinita di valori numerici:

$$x_0, x_1, \dots x_k$$

- La successione numerica può essere interpretata come una funzione avente come dominio l'insieme dei numeri naturali e codominio l'insieme dei numeri reali.

$$x(k) : k \in \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$$

Trasformata "Zeta" di successioni.

- Si dice trasformata Zeta di una successione la serie così definita:

$$X(z) := \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}$$

- dove $X(z)$ è una funzione complessa nella variabile complessa z.

Note sul lucido 11

- La convergenza della serie $X(z)$ dipende dagli elementi della successione x_k e dai valori che assume la variabile z. In generale si avrà un dominio di convergenza corrispondente alla parte di piano complesso esterno ad una circonferenza di raggio ρ_c.
- La trasformata zeta traduce una serie infinita di valori numerici in una funzione complessa. Chiaramente la funzione avrà una struttura semplice solamente se la successione presenta una struttura regolare. Per esempio consideriamo la serie:

$$x_k = 1, \forall k \geq 0$$

si traduce nella trasformata Zeta:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} = \frac{z}{z-1}$$

- Nel seguito indicheremo con $\mathcal{Z}\left[x_k\right]$ l'applicazione dell'operatore *trasformata Zeta* della successione x_k.
- La trasformata $\mathcal{Z}$non ha alcuna relazione con alcuna collocazione temporale dei campioni (non vi è relazione con un il periodo di campionamento con cui sono stati ottenuti i campioni).

Proprietà della $\mathcal{Z}$-trasformata

- Linearità.
- Traslazione.
- Traslazione complessa.
- Valore iniziale.
- Valore finale.
- Convoluzione.

Traslazione all'indietro

- Traslazione all'indietro:

$$\mathcal{Z}\left[x_{k-n}\right] = z^{-n}\mathcal{Z}\left[x_k\right]$$

- Caso particolare $n = 1$:

$$\mathcal{Z}\left[x_{k-1}\right] = z^{-1}\mathcal{Z}\left[x_k\right]$$

Note sul lucido 13

Dimostrazione

$$\mathcal{Z}\left[x_k\right] = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}$$

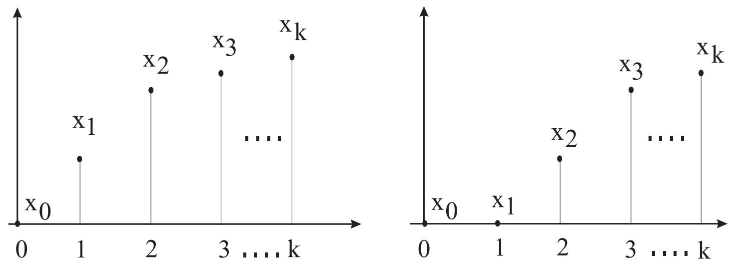
$$\mathcal{Z}\left[x_{k-n}\right] = \sum_{k=0} x_{k-n} z^{-k} \text{ ponendo k-n=k'}$$

$$= \sum_{k'+n=0}^{\infty} x_{k'} z^{-k'-n}$$

$$= z^{-n} \sum_{k'=-n}^{\infty} x_{k'} z^{-k'} \quad \text{pongo } k' = k$$

$$= z^{-n} \left(\underbrace{\sum_{k=-n}^{-1} x_k z^{-k}}_{=0 \text{ siccome } x_k=0 \text{ per } k<0} + \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \right)$$

Esempio: successione x_{k-1}



Traslazione in avanti

- Traslazione in avanti:

$$\mathcal{Z}\left[x_{k+n}\right] = \left\{ \mathcal{Z}\left[x_k\right] - \sum_{k=0}^{n-1} x_k z^{-k} \right\} z^n$$

- Caso particolare $n = 1$:

$$\mathcal{Z}\left[x_{k+1}\right] = \left\{ \mathcal{Z}\left[x_k\right] - x_0 \right\} z$$

Note sul lucido 15

Dimostrazione

$$\mathcal{Z}\left[x_k\right] = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}$$

$$\mathcal{Z}\left[x_{k+n}\right] = \sum_{k=0} x_{k+n} z^{-k} \quad \text{ponendo k+n=k'}$$

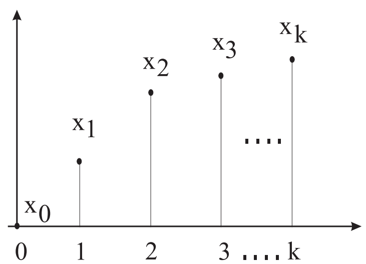
$$= \sum_{k'-n=0}^{\infty} x_{k'} z^{-k'+n}$$

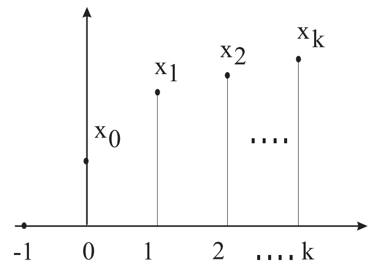
$$= z^n \sum_{k'=n}^{\infty} x_{k'} z^{-k'} \quad \text{pongo } k' = k$$

$$= z^n \left(\sum_{k=n}^{\infty} x_k z^{-k} + \sum_{k=0}^{n-1} x_k z^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x_k z^{-k} \right)$$

$$= z^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x_k z^{-k} \right)$$

Esempio: successione x_{k+1}





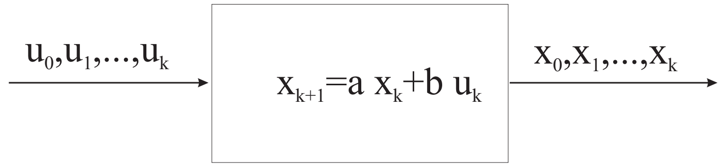
Argomento

- Schema logico di un controllore digitale.
- Introduzione al metodo di progetto per "discretizzazione".
- Metodi per l'analisi di successioni.

⋙ **Rappresentazione di sistemi lineari mediante equazioni alle differenze.**

- Successioni ottenute da campionamento di segnale continuo.
- Il metodo di progetto per "discretizzazione".
- PID digitale.
- Metodi di antisaturazione.

Sistemi lineari ed equazioni alle differenze



Rappresentazione mediante $\mathcal{Z}$–trasformate

- Utilizzando le proprietà delle $\mathcal{Z}$–trasformate è possibile rappresentare un sistema dinamico lineare descritto da equazioni alle differenze mediante una funzione di trasferimento.
- Esempio trasformazione della equazione alle differenze:

Equazione alle differenze: $x_{k+1} = a x_k + b u_k$

Trasformata: $\mathcal{Z}\left[x_{k+1} = a x_k + b u_k\right] \Rightarrow \mathcal{Z}\left[x_k\right] z = a \mathcal{Z}\left[x_k\right] + b \mathcal{Z}\left[u_k\right]$

Da cui: $\dfrac{\mathcal{Z}\left[x_k\right]}{\mathcal{Z}\left[u_k\right]} = \dfrac{N(z)}{D(z)} = G(z) = \dfrac{b}{z-a}$

Proprietà della Funzione di Trasferimento (F.d.T.)

- La F.d.T. descrive completamante il comportamento del sistema.
  - È possibile calcolare la risposta x_k del sistema una volta nota la successione di ingresso u_k.

$$x(z) = G(z) u(z)$$

  - È possibile valutare le caratteristiche di stabilità del sistema analizzando i poli della F.d.T.

Forme equivalenti della F.d.T.

$$
\begin{aligned}
x(z) = G(z)u(z) &= \frac{a_n z^n + \cdots a_1 z^1 + a_0}{b_m z^m + \cdots b_1 z^1 + b_0}\, u(z) = \\
&= \frac{z^{-m}}{z^{-m}} G(z)u(z) = G(z^{-1})u(z) = \frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})}\, u(z) \\
&= \frac{a_n z^{n-m} + \cdots a_1 z^{1-m} + a_0 z^{-m}}{b_m + \cdots b_1 z^{1-m} + b_0 z^{-m}}\, u(z) \\
&= \frac{a'_n z^{n-m} + \cdots a'_1 z^{1-m} + a'_0 z^{-m}}{1 + \cdots b'_1 z^{1-m} + b'_0 z^{-m}}\, u(z) \quad \text{avendo posto } a'_n = \frac{a_n}{b_m}, \cdots ,
\end{aligned}
$$

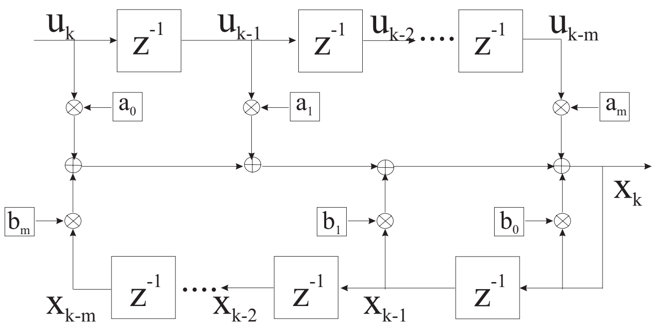
Ritornando alla equazione alle differenze

$$
x(z)(1 + \cdots b'_1 z^{1-m} + b'_0 z^{-m}) = u(z)(a'_n z^{n-m} + \cdots a'_1 z^{1-m} + a'_0 z^{-m})
$$

$$
\begin{aligned}
x(k) + \cdots b'_1 x(k+1-m) + b'_0 x(k-m) &= \\
a'_n u(k+n-m) + \cdots a'_1 x(k+1-m) &+ a'_0 x(k-m)
\end{aligned}
$$

- Per la casualità del sistema occorre che sia $n - m < 0$

Schema a blocchi



Argomento

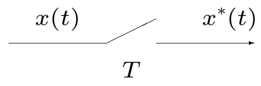
- Schema logico di un controllore digitale.
- Introduzione al metodo di progetto per "discretizzazione".
- Metodi per l'analisi di successioni.
- Rappresentazione di sistemi lineari mediante equazioni alle differenze.
- ⋙ **Successioni ottenute da campionamento di segnale continuo.**
- Il metodo di progetto per "discretizzazione".
- PID digitale.
- Metodi di antisaturazione.

Successioni ottenute da campionamento di segnale continuo

- Modello matematico dell'operazione di campionamento.
- Il fenomeno dell'aliasing.
- Ricostruttore di segnale (Sample/Hold).

Analisi del processo di campionamento

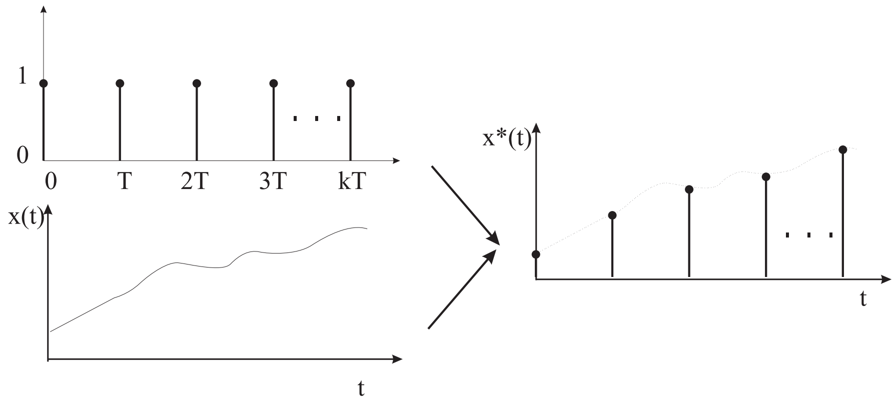
- Campionamento del segnale continuo $x(t)$ ottenendo il segnale (ancora a tempo continuo) $x^*(t)$.



- Rappresentazione matematica del processo di campionamento:

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - kT)$$

Campionatore



Spettro del segnale campionato.

1. Il segnale campionato $x^*(t)$ è un segnale periodico e quindi rappresentabile mediante serie di Fourier:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j(2\pi n/T)t}$$

2. dove il coefficiente C_n si calcola come:

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) e^{-jn(2\pi t/T)} dt$$

3. Il solo impulso compreso nell'intervallo di integrazione è quello nell'origine (per cui è $k = 0$):

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn(2\pi t/T)} dt$$

4. In base alla proprietà della funzione $\delta(t)$: $\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn(2\pi t/T)} dt = 1$, per cui:

$$C_n = \frac{1}{T}$$

5. Per cui otteniamo la rappresentazione secondo trasformata di Fourier del campionatore ideale:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(2\pi n/T)t}$$

6. Definiamo la pulsazione di campionamento $\omega_s = 2\pi/T$, e calcoliamo la trasformata di Laplace di un campionatore ideale:

$$\mathcal{L}\left[x^*(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t}\right] e^{-st} dt$$

7. Integrando la serie termine a termine (i.e. scambiando fra loro l'integrale e la somma):

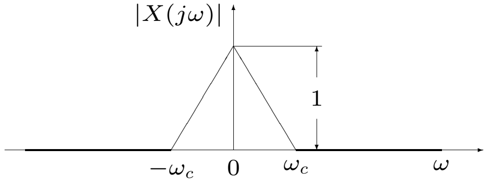
$$\mathcal{L}\left[x^*(t)\right] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{jn\omega_s t} e^{-st} dt$$

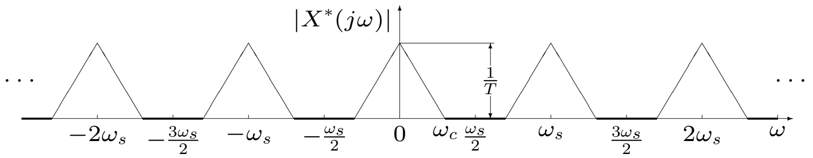
8. In base al teorema della traslazione in campo complesso relativo alla trasformata di Laplace:

$$\mathcal{L}\left[x^*(t)\right] = X^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}\left[x(t) e^{jn\omega_s t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(s - jn\omega_s)$$

- A meno della costante moltiplicativa $1/T$, la trasformata di Laplace $X^*(s)$ del segnale campionato si ottiene dalla somma degli infiniti termini, $X(s - j\,n\omega_s)$, ciascuno dei quali si ottiene dalla $X(s)$ mediante traslazione di $j\,n\omega_s$ nel campo complesso.
- L'andamento spettrale del segnale campionato vale:

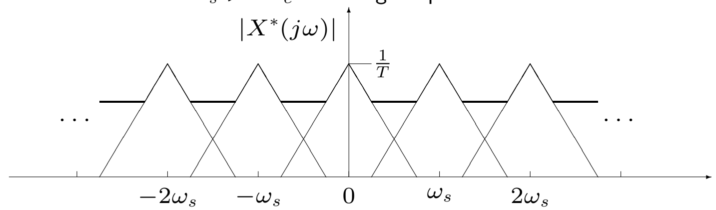
$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j\omega - j\,n\omega_s)$$





- La condizione $\omega_s > 2\omega_c$ mantiene distinto lo spettro originario dalle componenti complementari per cui, mediante filtraggio, è possibile ricostruire completamente il segnale $x(t)$.

- Nel caso in cui la condizione $\omega_s > 2\omega_c$ non venga rispettata:



- Lo spettro originario è parzialmente sovrapposto alle componenti complementari contigue per cui mediante filtraggio non è più possibile ricavare il segnale originario a partire dal segnale campionato

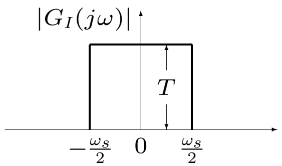
Teorema di Shannon

- **Teorema di Shannon**
  Sia $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ la pulsazione di campionamento (T è il periodo di campionamento), e sia ω_c la più alta componente spettrale del segnale tempo-continuo $x(t)$. Il segnale $x(t)$ è completamente ricostruibile a partire dal segnale campionato $x^*(t)$ se e solo se la pulsazione ω_s è maggiore del doppio della pulsazione ω_c:

$$\omega_s > 2\omega_c$$

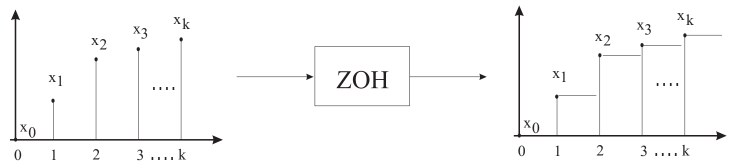
- Ricostruzione mediante filtro ideale

$$G_I(j\omega) = \begin{cases} T & -\frac{\omega_s}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



Il riscostruttore reale: lo Zero Order Hold (ZOH)

- Lo ZOH mantiene ad un valore costante i campioni su tutto il periodo di campionamento T.
- Da un punto di vista tecnologico, la funzione di ZOH è implementata da un Sample and Hold.



Caratterista dello ZOH

- La caratteristica dello ZOH si ricava dalla funzione a gradino $s(t)$ calcolata all'istante $t = kT$ a cui si sottrae la stessa funzione calcolata in $t = kT - T$.

$$p(t) = s(t) - s(t - T)$$

$$\mathcal{L}\left[p(t)\right] = \mathcal{L}\left[s(t) - s(t - T)\right] = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

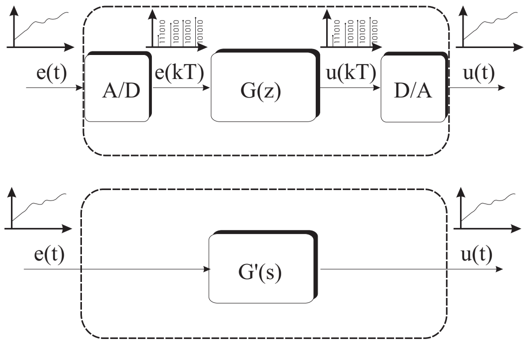
Argomento

- Schema logico di un controllore digitale.
- Introduzione al metodo di progetto per "discretizzazione".
- Metodi per l'analisi di successioni.
- Rappresentazione di sistemi lineari mediante equazioni alle differenze.
- Successioni ottenute da campionamento di segnale continuo.

⋙ **Il metodo di progetto per "discretizzazione"**.
- PID digitale.
- Metodi di antisaturazione.

Il metodo di progetto per "discretizzazione"

- Equivalenza tra segnali rappresentati mediante $\mathcal{L}$-trasformate e $\mathcal{Z}$-trasformate.



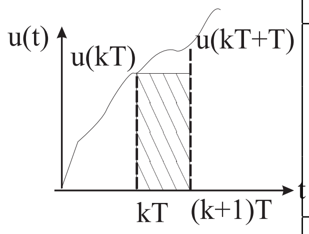
Discretizzazione

- La discretizzazione è il processo attraverso cui è possibile trasformare la rappresentazione $G(s)$ di un sistema a tempo continuo nella rappresentazione $G(z)$ a tempo discreto.

$$G(s) \quad \overset{z=f(s)}{\Rightarrow} \quad G'(z)$$

Occorre determinare la funzione $z = f(s)$

Metodi di discretizzazione - 1) Foreward difference

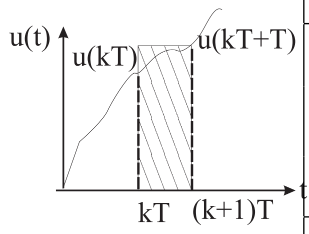


$$I(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau \Rightarrow I(s) = \frac{1}{s}u(s)$$

$$I(kT+T) = I(kT) + \int_{t=kT}^{t=kT+T} u(\tau)d\tau$$
$$I(kT+T) \overset{Appross.}{\approx} I(kT) + Tu(kT)$$
$$zI(z) - I(z) = Tu(z)$$
$$I(z) = \frac{T}{z-1}u(z)$$

$$s = \frac{z-1}{T}$$

Metodi di discretizzazione - 2) Backward difference

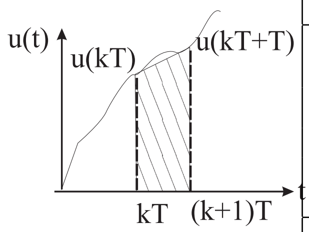


$$I(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau \Rightarrow I(s) = \frac{1}{s}u(s)$$

$$I(kT+T) = I(kT) + \int_{t=kT}^{t=kT+T} u(\tau)d\tau$$
$$I(kT+T) \overset{Appross.}{\approx} I(kT) + Tu(kT+T)$$
$$zI(z) - I(z) = Tzu(z)$$
$$I(z) = \frac{zT}{z-1}u(z)$$

$$s = \frac{z-1}{zT}$$

Metodi di discretizzazione - 3) Bilinear



$$I(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau \Rightarrow I(s) = \frac{1}{s}u(s)$$

$$I(kT+T) = I(kT) + \int_{t=kT}^{t=kT+T} u(\tau)d\tau$$
$$I(kT+T) \overset{Appross.}{\approx} I(kT) + \frac{T}{2}(u(kT) + u(kT+T))$$
$$zI(z) - I(z) = \frac{T}{2}(u(z) + zu(z))$$
$$I(z) = \frac{T}{2}\frac{z+1}{z-1}u(z)$$

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

Equazioni alle differenze

- L'implementazione finale richiede di ricavare l'equazione alle differenze che implementa il regolatore dalla funzione di trasferimento discreta.

$$u(z) = \frac{a_n z^{n-m} + \cdots a_1 z^{1-m} + a_0 z^{-m}}{b_m + \cdots b_1 z^{1-m} + b_0 z^{-m}} e(z), \quad n < m$$
$$\Downarrow$$

$$b_m u(kT) + \cdots + b_1 u(kT - mT + T) + b_0 u(kT - mT) =$$
$$= a_n e(kT - mT + nT) + \cdots + a_1 e(kT - mT + T) + a_0 e(kT - mT)$$

Implementazione finale

```
static float u[n],e[m];
static float a[n], b[m];

controllore(e[0])
{
/* Algoritmo di controllo */
u[0] = 1/b[m]*(-(b[m-1]*u[1] + ...  + b[0]*u[m])) + ...
... + 1/b[m] * (a[n]*e[m-n] + a[n-1]*e[m-n+1]+... + a[0]*e[m]);
/* Aggiornamento campioni precedenti */
u[1]=u[0]; u[2]=u[1];  ...  u[n]=u[n-1];

e[1]=e[0]; e[2]=e[1];  ...  e[m]=e[m-1];
return(u[0])
}
```


Argomento

- Schema logico di un controllore digitale.
- Introduzione al metodo di progetto per “discretizzazione”.
- Metodi per l’analisi di successioni.
- Rappresentazione di sistemi lineari mediante equazioni alle differenze.
- Successioni ottenute da campionamento di segnale continuo.
- Il metodo di progetto per “discretizzazione”.

⋙ **PID digitale.**

- Metodi di antisaturazione.

Algoritmo PID digitale

- L’algoritmo PID continuo:

$$u(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{sT_d}{\frac{T_d}{N}s + 1}\right)$$

- Discretizzazione della funzione di trasferimento $G_c(s)$.

Discretizzazione della $G_c(s)$

$$\begin{aligned} u(z) &= K\,\left(1 + \left.\frac{1}{T_i s}\right|_{s=\frac{z-1}{T}} + \left.\frac{sT_d}{\frac{T_d}{N}s + 1}\right|_{s=\frac{z-1}{zT}}\right) \\ &= K\left(1 + \frac{T}{T_i(z-1)} + \frac{T_d}{T + T_d/N}\,\frac{z-1}{[z - T_d/(NT + T_d)]}\right) \end{aligned}$$

- Con le posizioni

$$\alpha = \frac{T}{T_i} \qquad \beta = \frac{NT_d}{(NT+T_d)} \qquad \gamma = \frac{T_d}{(NT+T_d)}$$

$$q_0 = K_p(1+\beta), \quad q_1 = -K_p(1+\gamma-\alpha+2\beta) \quad q_2 = K_p(\gamma-\alpha\gamma+\beta)$$

- Il regolatore si riscrive come

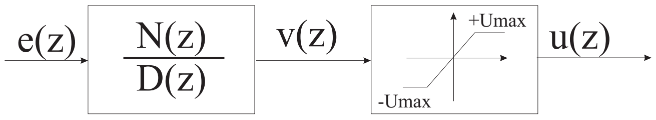
$$G_c(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_2}{(z-1)(z-\gamma)} = \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_2}{z^2 - (\gamma+1)z + \gamma}$$

Argomento

- Schema logico di un controllore digitale.
- Introduzione al metodo di progetto per "discretizzazione".
- Metodi per l'analisi di successioni.
- Rappresentazione di sistemi lineari mediante equazioni alle differenze.
- Successioni ottenute da campionamento di segnale continuo.
- Il metodo di progetto per "discretizzazione".
- PID digitale.

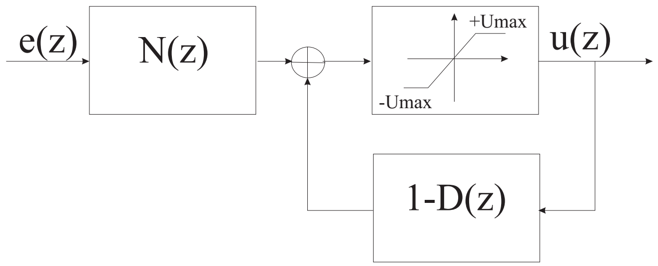
⋙ **Metodi di antisaturazione.**

Metodo di antisaturazione (*Errato*)



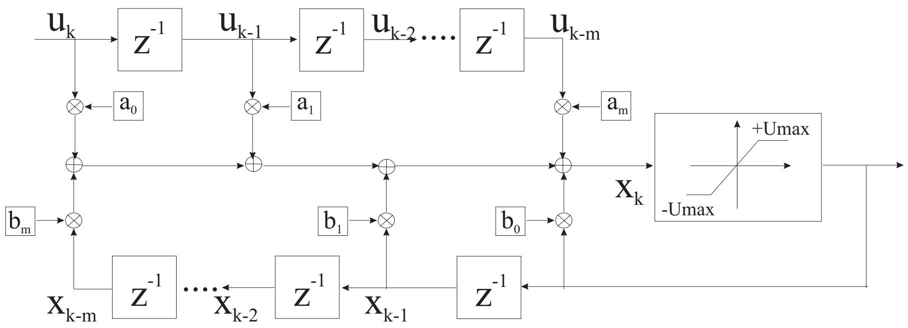
- La saturazione sull'uscita non impedisce alle variabili interne al controllore di raggiungere valori elevati.

Metodo di antisaturazione (*Corretto*)



- In assenza di saturazione la funzione di trasferimento del sistema vale: $G(z) = N(z)\frac{1}{1-(1-D(z))} = \frac{N(z)}{D(z)}$
- La saturazione in questo caso agisce sulle variabili interne e quindi si evita che queste raggiungano valori elevati.

Schema a blocchi della saturazione corretta



Implementazione della saturazione

```
static float u[n],e[m];
static float a[n], b[m];

controllore(e[0])
{
/* Algoritmo di controllo */
   u[0] = 1/b[m]*(-(b[m-1]*u[1] + ...  + b[0]*u[m])) + ...
   ... + 1/b[m] * (a[n]*e[m-n] + a[n-1]*e[m-n+1]+... + a[0]*e[m]);
/* Antisaturazione */
   u[0] = sat(u[0],Umax,Umin);
/* Aggiornamento campioni precedenti */
   u[1]=u[0]; u[2]=u[1];  ...  u[n]=u[n-1];
   e[1]=e[0]; e[2]=e[1];  ...  e[m]=e[m-1];
   return(u[0])
```



```
}
```


La funzione di saturazione

```
sat(x,xMax,xmin)
{
if (x>xMax)
    return(xMax);
else if (x<xmin)
    return(xmin);
else return(x);
}
```

Antisaturazione termine integrale del PID