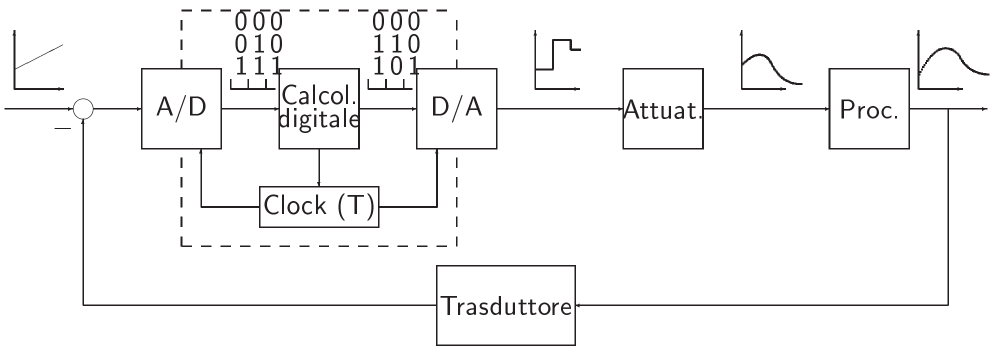
Sistemi di controllo digitale

Sistemi di controllo in retroazione in cui è presente un sistema digitale per l'elaborazione a tempo discreto della legge di controllo

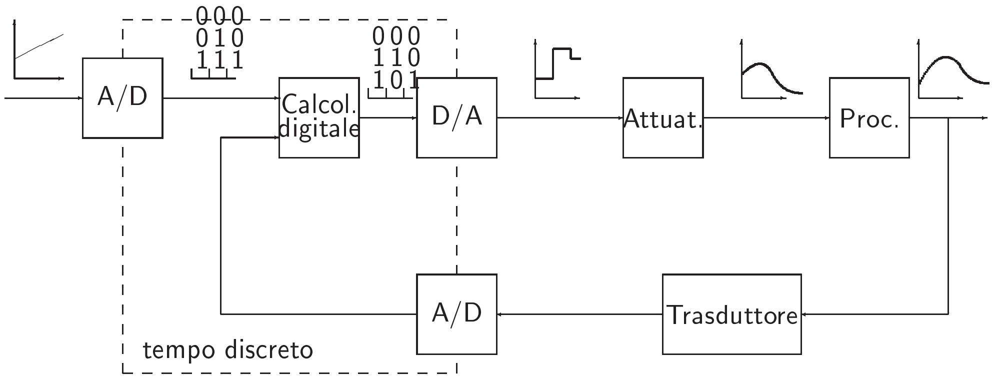
Perchè il controllo digitale ?

- Flessibilità del sistema di controllo.
- Prestazioni del sistema di controllo.
- Colloquio con sistemi di supervisione.
- Complessità di progetto

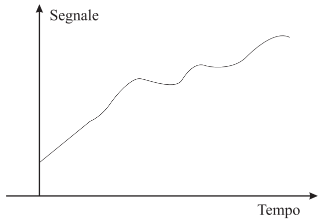
Schema tipico di un controllo digitale



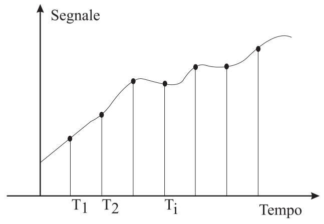
Schema tipico di un controllo digitale



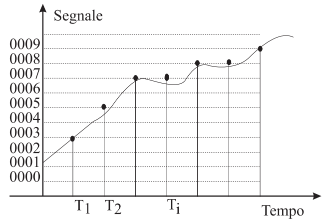
Segnali continui, campionati e quantizzati



(a) Segnale analogico



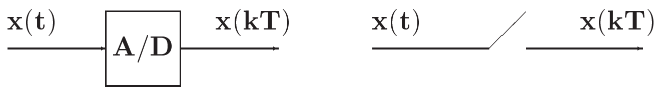
(b) segnale campionato



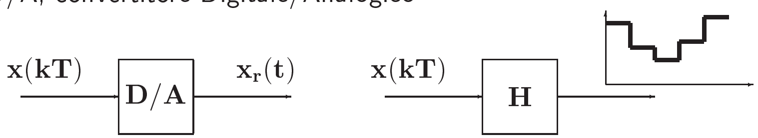
(c) Segnale quantizzato

Dispositivi di interfaccia

- A/D, convertitore Analogico/Digitale



- D/A, convertitore Digitale/Analogico



Ipotesi di lavoro.

1. Il tempo di **elaborazione** è trascurabile rispetto al tempo di **campionamento**.

2. L'errore di quantizzazione è trascurabile (lunghezza di parola ALU del calcolatore grande).

Caratteristiche del controllo digitale

- Il modello del sistema complessivo ha due caratteristiche:
  - Il processo/impianto: modello **a tempo continuo**
  - Il controllore: legge di controllo **a tempo discreto**
- Il segnale digitale ha le proprietà di essere:
  - **Campionato** $\Rightarrow$ definito agli istanti kT, $k = 0, 1, \ldots$
  - **Quantizzato** $\Rightarrow$ rappresentato da un numero finito di bits.
- Strumento matematico per il trattamento dei segnali digitali:
  - Equazioni alle differenze e **Traformata Zeta**

Equazioni alle differenze.

- Permettono di rappresentare sistemi la cui relazione **ingresso-uscita** dipende dal tempo, valutato ad istanti discreti.
- Esempio:

Dato un capitale $y(kT)$ valutato nel periodo kT, un tasso di interesse a ed un versamento $u(kT)$ effettuato sempre nello stesso periodo kT, calcolare il capitale nel periodo successivo $y((k+1)T)$.

- soluzione: $y((k+1)T) = ay(kT) + u(kT)$

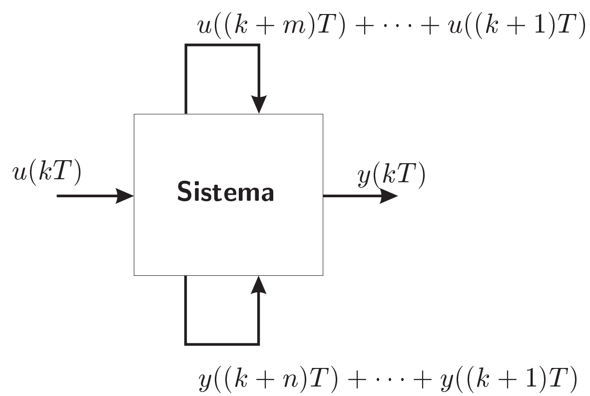
Equazione alle differenze lineare ordinaria di ordine n.

In generale un sistema dinamico definito a tempo discreto può essere rappresentato da una **equazione alle differenze** del tipo:

$$\begin{aligned} y((k+n)T) + a_{n-1}y((k+n-1)T) + \cdots + a_1 y((k+1)T) + a_0 y(kT) = \\ b_m u((k+m)T) + b_{m-1}u((k+m-1)T) + \cdots + b_1 u((k+1)T) + b_0 u(kT) \end{aligned}$$

dove i coefficienti $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ e $b_{m-1}, \ldots, b_1, b_0$ sono costanti.

L'equazione alle differenze rappresenta la <u>struttura</u> del sistema, mentre i coefficienti $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ e $b_{m-1}, \ldots, b_1, b_0$ sono i <u>parametri</u> del modello.



A cosa serve l'equazione alle differenze?

- **Predizione:** Risolvendola, conoscendo il valore dell'ingresso $u(kT)$ in un certo intervallo $k \in [k_0, k_n]$ ed una condizione iniziale $y(k_0T)$, posso predire il valore dell'uscita $y(kT)$ nello stesso intervallo.

- **Analisi:** Mediante una semplice analisi dei coefficienti $a_{n-1}, \dots$, posso determinare alcune caratteristiche del sistema, valide in generale qualunque sia il particolare ingresso applicato.

Note sul lucido 13

Esempio in Matlab:

COnsidero un capitale inziale di 1.000.000, a cui aggiungo il primo anno 300.000, il secondo 400.000 ed il terzo 500.000, con un interesse del 10 %, qual è il capitale all'inizio del quarto anno?

Nota: l'interesse del 10% si traduce in un coefficiente $a = 1.1$. Cosa accadrebbe se il coefficiente fosse di $a = 0.5$?

Strumenti matematici

La Trasformata Zeta è una funzione complessa di variabile complessa, utilizzata per analizzare i modelli matematici (equazioni alle differenze) dei sistemi fisici definiti a tempo discreto.

Z-Trasformata

- Sia data una sequenza di valori $\mathbf{x_k} \in \Re$, definita per $\mathbf{k = 0, 1, 2, \dots}$ e nulla per $\mathbf{k < 0}$. La $\mathcal{Z}$-trasformata (unilatera) della sequenza $\mathbf{x_k}$ è la funzione di variabile complessa $\mathbf{z}$ definita come

$$\mathbf{X(z)} = \mathcal{Z}[\mathbf{x_k}] = \mathbf{x_0 + x_1\, z^{-1} + \cdots + x_k\, z^{-k} + \cdots} = \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{x_k z^{-k}}$$

- Nel caso in cui la sequenza di valori $\mathbf{x_k}$ sia ottenuta campionando uniformemente con periodo $\mathbf{T}$ un segnale continuo descritto dalla funzione $\mathbf{x(t)}$, $\mathbf{t \geq 0}$, si avrà che $\mathbf{x_k = x(kT)}$.

- L'espressione estesa

$$\mathbf{X(z) = x(0) + x(T)\, z^{-1} + x(2\,T)\, z^{-2} + \cdots + x(k\,T)\, z^{-k} + \cdots}$$

implica la specificazione del **parametro periodo di campionamento** $\mathbf{T}$, da cui dipendono i valori dei campioni della sequenza, cioè i coefficienti della serie.

- Si usa:

$$\mathbf{X(z)} = \mathcal{Z}[\mathbf{X(s)}]$$

intendendo:

$$\mathbf{X(z)} = \mathcal{Z}\big[\{\mathcal{L}^{-1}[\mathbf{X(s)}]\big|_{\mathbf{t=kT}}\}\big]$$

Trasformata Z dell'impulso unitario.

- **Impulso discreto unitario**.

$$\mathbf{x(kT)} = \begin{cases} \mathbf{1} & \mathbf{kT = 0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{kT \neq 0} \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{aligned} \mathbf{X(z)} &= \mathcal{Z}[\mathbf{x(t)}] = \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{x(kT)z^{-k}} \\ &= \mathbf{1 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + 0z^{-3} + \cdots = 1} \end{aligned}$$

Trasformata Z del gradino unitario.

- **Gradino unitario**: Sia data la funzione gradino unitario:

$$\mathbf{x(kT) = h(kT)} = \begin{cases} \mathbf{1} & \mathbf{kT \geq 0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{kT < 0} \end{cases}$$

- La trasformata $\mathcal{Z}$ vale:

$$\begin{aligned} \mathbf{H(z)} &= \mathcal{Z}[\mathbf{h(kT)}] = \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{h(kT)z^{-k}} = \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots} \\ &= \mathbf{\frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}} \end{aligned}$$

- La serie è <u>convergente</u> per $|\mathbf{z}| > \mathbf{1}$.

Trasformata Z della Rampa unitaria.

- **Rampa unitaria**. Si consideri la funzione rampa unitaria:

$$\mathbf{x(kT)} = \begin{cases} \mathbf{kT} & \mathbf{kT \geq 0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{kT < 0} \end{cases}$$

- La $\mathcal{Z}$-trasformata è

$$\begin{aligned} \mathbf{X(z)} &= \mathcal{Z}[\mathbf{kT}] = \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{x(kT)z^{-k} = T} \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{kz^{-k} = T(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \cdots)} \\ &= \mathbf{Tz^{-1}(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \cdots) = T\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = T\frac{z}{(z - 1)^2}} \end{aligned}$$

convergente per $|\mathbf{z}| > \mathbf{1}$.

Proprietà della trasformata $\mathcal{Z}$ (1).

- Linearità:

$$\mathcal{Z}[\mathbf{k_1 f_1(kT) + k_2 f_2(kT)}] = \mathbf{k_1}\mathcal{Z}[\mathbf{f_1(kT)}] + \mathbf{k_2}\mathcal{Z}[\mathbf{f_2(kT)}]$$

Proprietà della trasformata $\mathcal{Z}$ (2).

Teorema della traslazione nel tempo. Sia $\mathbf{X(z)} = \mathcal{Z}[\mathbf{x(kT)}]$, e $\mathbf{n = 1, 2, \ldots}$, allora

$$\mathcal{Z}[\mathbf{x(kT - nT)}] = \mathbf{z^{-n} X(z)} \qquad \text{(ritardo)}$$

$$\mathcal{Z}[\mathbf{x(kT + nT)}] = \mathbf{z^n} \left[\mathbf{X(z)} - \sum_{\mathbf{k=0}}^{\mathbf{n-1}} \mathbf{x(kT) z^{-k}} \right] \qquad \text{(anticipo)}$$

- In modo impreciso ma operativo:

$$\begin{aligned} \mathbf{z^{-1} x(kT)} &= \mathbf{x((k-1)T)} \\ \mathbf{z^{-2} x(kT)} &= \mathbf{x((k-2)T)} \\ \mathbf{z\, x(kT)} &= \mathbf{x((k+1)T)} \end{aligned}$$

e così via.

Funzione di trasferimento discreto di un sistema.

- La **Funzione di Trasferimento discreto** di un sistema è una funzione a variabile complessa $G(z)$ che caratterizza completamante il sistema fisico in esame.
- La risposta del sistema a **qualunque** segnale di ingresso può essere determinata attraverso la funzione di trasferimento:

  $$Y(z) = G(z)U(z)$$

  dove $U(z)$ e $Y(z)$ sono le trasformate dei segnali di ingresso e di uscita del sistema.

La funzione di trasferimento di un sistema può essere determinata dalla equazione differenziale del sistema, applicando le proprietà della trasformata Zeta:

$$s^n Y(z) + a_{n-1} z^{n-1} Y(z) + \ldots a_1 z Y(z) + a_0 Y(z) = \\ b_m z^m U(z) + b_{m-1} z^{m-1} U(z) + \ldots + b_1 z U(z) + b_0 U(z)$$

da cui:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

- Se utilizziamo come ingresso il **segnale impulsivo** $U(z) = 1$:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{1}$$

otteniamo che la **funzione di trasferimento** discreto del sistema è uguale alla $\mathcal{Z}$-trasformata del segnale di uscita del sistema.

Equazione caratteristica.

- **L'equazione caratteristica** di un sistema si ottiene prendendo il **denominatore** della funzione di trasferimento ed uguagliandolo a zero.

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

- Le **soluzioni** di tale equazione algebrica vengono dette **poli** del sistema.
- I poli di un sistema descrivono completamente il suo comportamanto dinamico.

Stabilità di un sistema a tempo discreto.

- Se **almeno una** delle radici della equazione caratteristica ha modulo maggiore di uno, la corrispondente equazione alle differenze è instabile, cioè la sua soluzione divergerà al crescere del tempo per condizione iniziale finita.
- Se **tutte** le radici dell'equazione caratteristica sono **entro** in cerchio unitario, allora la corrispondente equazione alle differenze è **stabile**, cioè la sua soluzione convergerà a zero al crescere del tempo per ogni condizione iniziale finita

Il campionamento di segnali continui.

- Nella automazione industriale i sistemi di interesse (attuatori elettrici, sistemi meccanici, ...) hanno un comportamento intrinsecamente a tempo continuo.
- La necessità di operare a tempo discreto nasce dall'utilizzo dei calcolatori.
- Occorre definire un metodo per tradurre i segnali a tempo continuo in segnali a tempo in modo da minimizzare la perdita di contenuto informativo.

lezione 1

- PROCESSO:

  Un insieme di operazioni o di trasformazioni che devono avvenire in sequenza opportuna in un impianto o in un sistema fisico

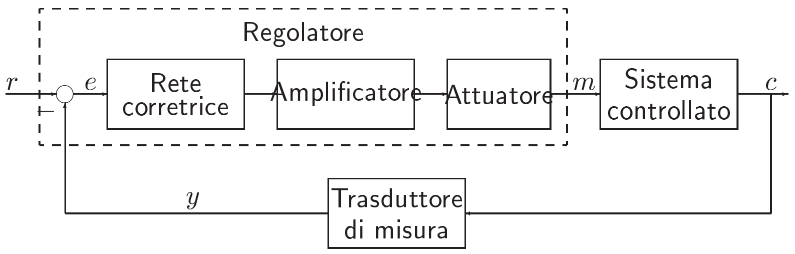
- CONTROLLO DEI PROCESSI:

  Insieme di metodologie, tecniche e tecnologie orientate alla conduzione automatizzata di impianti industriali

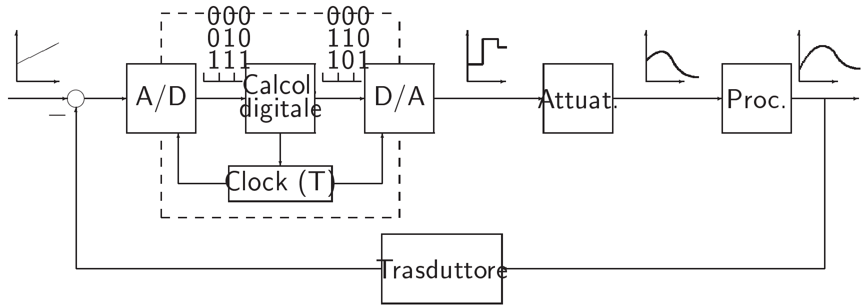
- **SISTEMI DI CONTROLLO DIGITALE**:

  Sistemi di controllo in retroazione in cui è presente un calcolatore digitale e quindi una elaborazione a tempo discreto della legge di controllo

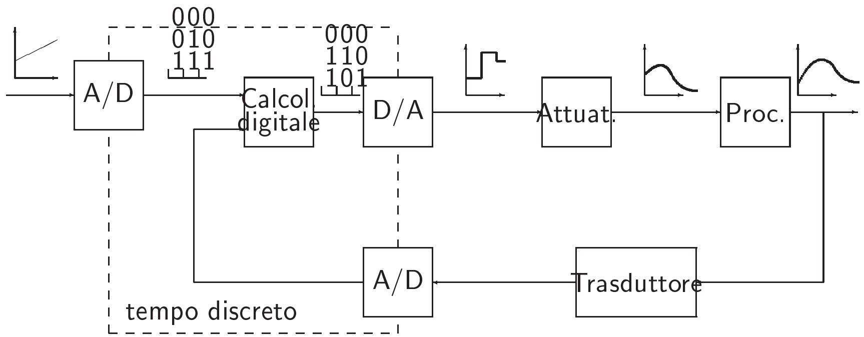
SCHEMA TIPICO DI UN SISTEMA DI CONTROLLO ANALOGICO



SCHEMI TIPICI DI UN SISTEMA DI CONTROLLO DIGITALE (1)



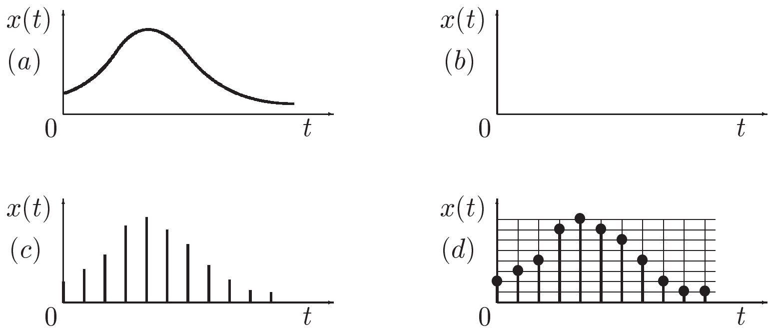
SCHEMI TIPICI DI UN SISTEMA DI CONTROLLO DIGITALE (2)



- **CONTROLLO DIGITALE / CONTROLLO ANALOGICO** :
  - \+ Maggiore capacità e precisione di elaborazione
  - \+ Maggiore flessibilità
  - \+ Maggiore affidabilità e ripetibilità
  - \+ Maggiore trasmissibilità dei segnali
  - \- Progettazione più difficile e articolata
  - \- Stabilizzabilità più precaria
  - \- Possibilità di arresti non previsti
  - \- Necessità di utilizzare energia elettrica

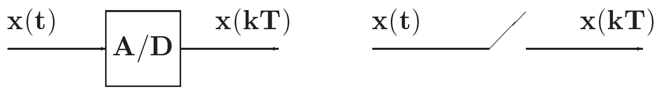
SEGNALI DI INTERESSE

a) Analogico di tipo continuo; b) Tempo-continuo quantizzato; c) A dati campionati; d) Digitale

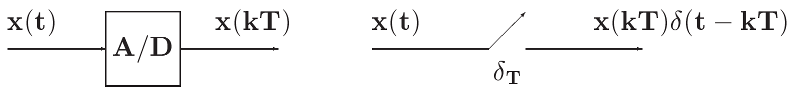


DISPOSITIVI DI INTERFACCIA

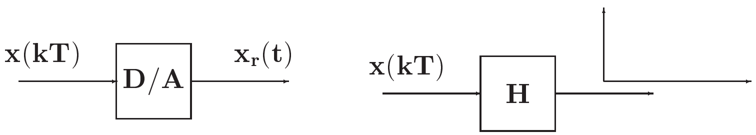
- A/D, convertitore Analogico/Digitale



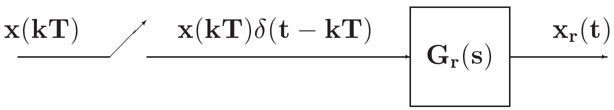
Con campionamento modellato ad impulsi di Dirac:



- **D/A, convertitore Digitale/Analogico**



Modello:



Caso dell'Hold:

$$\mathbf{G_r(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}}$$

ANELLO DI CONTROLLO DIGITALE

- Parte tempo continua: processo/impianto
- Parte tempo discreta: sistema di controllo
- Campionamento regolare di periodo $\mathbf{T}$
- Trasformata Zeta

lezione 2

- **Equazione alle differenze**:

$$\mathbf{u_k = f(e_0, e_1, \ldots, e_k; u_0, u_1, \ldots, u_{k-1})}$$

Se $\mathbf{f}(\cdot)$ è lineare:

$$\mathbf{u_k = -a_1 u_{k-1} - \ldots - a_n u_{k-n} + b_0 e_k + \ldots + b_m e_{k-m}}$$

Esempio:

$$\mathbf{u_k = -a_1 u_{k-1} - a_2 u_{k-2} + b_0 e_k}$$

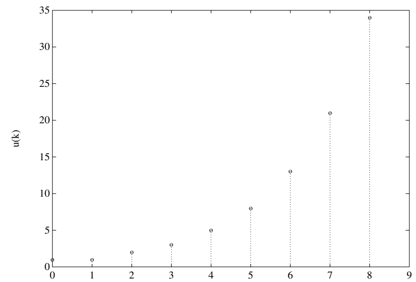
$$\begin{aligned} \mathbf{u_k} &= \mathbf{u_k} \\ \mathbf{u_{k-1}} &= \mathbf{u_k - \nabla u_k} \\ \mathbf{u_{k-2}} &= \mathbf{u_k - 2\nabla u_k + \nabla^2 u_k} \end{aligned}$$

$$\mathbf{a_2 \nabla^2 u_k - (a_1 + 2a_2)\nabla u_k + (a_2 + a_1 + 1)u_k = b_0 e_k}$$

- **Soluzione di equazioni alle differenze a coefficienti costanti**

$$\mathbf{u_k = u_{k-1} + u_{k-2}} \qquad \mathbf{k \geq 2}$$

$\mathbf{u_0 = u_1 = 1}$.



- **Soluzione elementare tipo** z^k:

$$cz^k = cz^{k-1} + cz^{k-2}$$

$$z^2 - z - 1 = 0 \qquad\qquad z_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$$

quindi in generale vale:

$$u_k = c_1 z_1^k + c_2 z_2^k$$

con c_1, c_2 determinate dalle condizioni iniziali per $k = 0,\ 1$. Infine si ha

$$u_k = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$$

Andamento divergente, dunque sistema instabile.

- Se **almeno una** delle radici della equazione caratteristica ha modulo maggiore di uno, la corrispondente equazione alle differenze è instabile, cioè la sua soluzione divergerà al crescere del tempo per condizione iniziale finita

- Se **tutte** le radici dell'equazione caratteristica sono **entro** in cerchio unitario, allora la corrispondente equazione alle differenze è **stabile**, cioè la sua soluzione convergerà a zero al crescere del tempo per ogni condizione iniziale finita

- Sia data una sequenza di valori $x_k \in \Re$, definita per $k = 0, 1, 2, \ldots$ e nulla per $k < 0$. **La $\mathcal{Z}$-trasformata (unilatera) della sequenza** x_k è la funzione di variabile complessa z definita come

$$\begin{aligned} X(z) = \mathcal{Z}[x_k] &= x_0 + x_1\, z^{-1} + \cdots + x_k\, z^{-k} + \cdots \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \end{aligned}$$

Nel caso in cui la sequenza di valori x_k sia ottenuta campionando uniformemente con periodo T un segnale continuo descritto dalla funzione $x(t)$, $t \geq 0$, si avrà che $x_k = x(kT)$:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}$$

- L'espressione estesa

$$X(z) = x(0) + x(T)\, z^{-1} + x(2\,T)\, z^{-2} + \cdots + x(k\,T)\, z^{-k} + \cdots$$

implica la specificazione del **parametro periodo di campionamento** T, da cui dipendono i valori dei campioni della sequenza, cioè i coefficienti della serie.

- Si usa:

$$X(z) = \mathcal{Z}[X(s)]$$

intendendo:

$$X(z) = \mathcal{Z}\left[\left\{ \mathcal{L}^{-1}[X(s)]\big|_{t=kT} \right\}\right]$$

- Nelle applicazioni ingegneristiche la funzione $\mathbf{X}(\mathbf{z})$ assume in generale una espressione **razionale fratta** del tipo

$$\mathbf{X}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{b_0\, z^m + b_1\, z^{m-1} + \cdots + b_m}}{\mathbf{z^n + a_1\, z^{n-1} + \cdots + a_n}}$$

che si può esprimere anche in potenze di $\mathbf{z^{-1}}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(\mathbf{z}) &= \frac{\mathbf{z^n\,(b_0\, z^{-(n-m)} + b_1\, z^{-(n-m+1)} + \cdots + b_m\, z^{-n})}}{\mathbf{z^n\,(1 + a_1\, z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n})}} \\ &= \frac{\mathbf{b_0\, z^{-(n-m)} + b_1\, z^{-(n-m+1)} + \cdots + b_m\, z^{-n}}}{\mathbf{1 + a_1\, z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}}\end{aligned}$$

- **Esempio**:

$$\mathbf{X}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{z(z+0.5)}}{\mathbf{(z+1)(z+2)}} = \frac{\mathbf{1 + 0.5\, z^{-1}}}{\mathbf{(1+z^{-1})(1+2\, z^{-1})}}$$

- **Impulso discreto unitario**, detta anche funzione di Kronecker $\delta_\mathbf{0}(\mathbf{t})$:

$$\mathbf{x(t)} = \begin{cases} \mathbf{1} & \mathbf{t = 0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{t \neq 0} \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(\mathbf{z}) &= \mathcal{Z}[\mathbf{x(t)}] = \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{x(kT) z^{-k}} \\ &= \mathbf{1 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + 0z^{-3} + \cdots = 1}\end{aligned}$$

- **Gradino unitario**: Sia data la funzione gradino unitario

$$\mathbf{x(t) = h(t)} = \begin{cases} \mathbf{1} & \mathbf{t \geq 0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{t < 0} \end{cases}$$

La funzione $\mathbf{h(k)}$ definita come

$$\mathbf{h(k)} = \begin{cases} \mathbf{1} & \mathbf{k = 0, 1, 2, \ldots} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k < 0} \end{cases}$$

è detta **sequenza unitaria**. Si ha che

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathbf{z}) &= \mathcal{Z}[\mathbf{h(t)}] = \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{h(kT) z^{-k}} = \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{z^{-k}} \\ &= \mathbf{1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots} \\ &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1 - z^{-1}}} = \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z - 1}}\end{aligned}$$

La serie è convergente per $|\mathbf{z}| > \mathbf{1}$.

- **Rampa unitaria**. Si consideri la funzione rampa unitaria:

$$\mathbf{x(t)} = \begin{cases} \mathbf{t} & \mathbf{t \geq 0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{t < 0} \end{cases}$$

Poichè $\mathbf{x(kT) = kT}$, $\mathbf{k = 0, 1, 2, \ldots}$, la $\mathcal{Z}$-trasformata è

$$\begin{aligned} \mathbf{X(z)} &= \mathcal{Z}[\mathbf{t}] = \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{x(kT) z^{-k}} = \mathbf{T} \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{k z^{-k}} \\ &= \mathbf{T(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \cdots)} \\ &= \mathbf{Tz^{-1}(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \cdots)} \\ &= \mathbf{T} \frac{\mathbf{z^{-1}}}{\mathbf{(1 - z^{-1})^2}} = \mathbf{T} \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{(z-1)^2}} \end{aligned}$$

convergente per $|\mathbf{z}| > \mathbf{1}$.

- **Funzione potenza $\mathbf{a^k}$**. Sia data la funzione

$$\mathbf{x(k)} = \begin{cases} \mathbf{a^k} & \mathbf{k = 0, 1, 2, \ldots} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k < 0} \end{cases}$$

con $\mathbf{a}$ costante reale o complessa. Dalla definizione di $\mathcal{Z}$-trasformata si ha che

$$\begin{aligned} \mathbf{X(z)} &= \mathcal{Z}\left[\mathbf{a^k}\right] = \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{x(k) z^{-k}} = \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{a^k z^{-k}} \\ &= \mathbf{1 + a\, z^{-1} + a^2\, z^{-2} + a^3\, z^{-3} + \cdots} \\ &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1 - a\, z^{-1}}} = \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z - a}} \end{aligned}$$

Questa serie geometrica converge per $|\mathbf{z}| > |\mathbf{a}|$.

- **Funzione esponenziale**. Sia data la funzione

$$\mathbf{x(t)} = \begin{cases} \mathbf{e^{-at}} & \mathbf{t \geq 0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{t < 0} \end{cases}$$

dove $\mathbf{a}$ è una costante reale o complessa. Poichè $\mathbf{x(kT) = e^{-akT}}, \mathbf{k = 0, 1, 2, \ldots}$, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{X(z)} &= \mathcal{Z}\left[\mathbf{e^{-at}}\right] = \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{e^{-akT} z^{-k}} \\ &= \mathbf{1 + e^{-aT}\, z^{-1} + e^{-2aT}\, z^{-2} + e^{-3aT}\, z^{-3} + \cdots} \\ &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1 - e^{-aT}\, z^{-1}}} = \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z - e^{-aT}}} \end{aligned}$$

che converge per $|\mathbf{z}| > \mathbf{e^{-\mathrm{Re}(a) T}}$. Si noti che per $\mathbf{a = 0}$ si ha il gradino unitario.

- **Funzione sinusoidale**. Sia data la sinusoide

$$\mathbf{x(t)} = \begin{cases} \sin \omega \mathbf{t} & \mathbf{t \geq 0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{t < 0} \end{cases}$$

Dalle formule di Eulero è noto che

$$\sin \omega \mathbf{t} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2j}} (\mathbf{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X(z)} &= \mathcal{Z}[\sin \omega \mathbf{t}] = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2j}} \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1 - e^{j\omega T}\, z^{-1}}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1 - e^{-j\omega T}\, z^{-1}}} \right) \\ &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2j}} \frac{\mathbf{(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}) z^{-1}}}{\mathbf{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) z^{-1} + z^{-2}}} \\ &= \frac{\mathbf{z^{-1}} \sin \omega \mathbf{T}}{\mathbf{1 - 2z^{-1}} \cos \omega \mathbf{T} + \mathbf{z^{-2}}} = \frac{\mathbf{z} \sin \omega \mathbf{T}}{\mathbf{z^2 - 2z} \cos \omega \mathbf{T} + \mathbf{1}} \end{aligned}$$

convergente per $|\mathbf{z}| > \mathbf{1}$.

- **Funzione cosinusoidale**. Sia data la funzione

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \begin{cases} \cos \omega \mathbf{t} & \mathbf{t} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{t} < \mathbf{0} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(\mathbf{z}) &= \mathcal{Z}[\cos \omega \mathbf{t}] = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \mathbf{e}^{\mathbf{j}\omega \mathbf{T}}\mathbf{z}^{-\mathbf{1}}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \mathbf{e}^{-\mathbf{j}\omega \mathbf{T}}\mathbf{z}^{-\mathbf{1}}}\right) \\
&= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\frac{\mathbf{2} - (\mathbf{e}^{-\mathbf{j}\omega \mathbf{T}} + \mathbf{e}^{\mathbf{j}\omega \mathbf{T}})\mathbf{z}^{-\mathbf{1}}}{\mathbf{1} - (\mathbf{e}^{\mathbf{j}\omega \mathbf{T}} + \mathbf{e}^{-\mathbf{j}\omega \mathbf{T}})\mathbf{z}^{-\mathbf{1}} + \mathbf{z}^{-\mathbf{2}}} \\
&= \frac{\mathbf{1} - \mathbf{z}^{-\mathbf{1}}\cos \omega \mathbf{T}}{\mathbf{1} - \mathbf{2}\mathbf{z}^{-\mathbf{1}}\cos \omega \mathbf{T} + \mathbf{z}^{-\mathbf{2}}} \\
&= \frac{\mathbf{z}(\mathbf{z} - \cos \omega \mathbf{T})}{\mathbf{z}^{\mathbf{2}} - \mathbf{2}\mathbf{z}\cos \omega \mathbf{T} + \mathbf{1}} \qquad |\mathbf{z}| > \mathbf{1}
\end{aligned}$$

- **Funzione cosinusoidale smorzata**. Sia dato il segnale

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \begin{cases} \mathbf{e}^{-\mathbf{a}\mathbf{t}}\cos \omega \mathbf{t} & \mathbf{t} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{t} < \mathbf{0} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(\mathbf{z}) &= \mathcal{Z}\left[\mathbf{e}^{-\mathbf{a}\mathbf{t}}\cos \omega \mathbf{t}\right] = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathcal{Z}\left[(\mathbf{e}^{-\mathbf{a}\mathbf{t}}\mathbf{e}^{\mathbf{j}\omega \mathbf{t}} + \mathbf{e}^{-\mathbf{a}\mathbf{t}}\mathbf{e}^{-\mathbf{j}\omega \mathbf{t}})\right] \\
&= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \mathbf{e}^{-(\mathbf{a}-\mathbf{j}\omega)\mathbf{T}}\mathbf{z}^{-\mathbf{1}}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \mathbf{e}^{-(\mathbf{a}+\mathbf{j}\omega)\mathbf{T}}\mathbf{z}^{-\mathbf{1}}}\right) \\
&= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\frac{\mathbf{2} - (\mathbf{e}^{-\mathbf{j}\omega \mathbf{T}} + \mathbf{e}^{\mathbf{j}\omega \mathbf{T}})\mathbf{e}^{-\mathbf{a}\mathbf{T}}\mathbf{z}^{-\mathbf{1}}}{\mathbf{1} - (\mathbf{e}^{\mathbf{j}\omega \mathbf{T}} + \mathbf{e}^{-\mathbf{j}\omega \mathbf{T}})\mathbf{e}^{-\mathbf{a}\mathbf{T}}\mathbf{z}^{-\mathbf{1}} + \mathbf{e}^{-\mathbf{2}\mathbf{a}\mathbf{T}}\mathbf{z}^{-\mathbf{2}}} \\
&= \frac{\mathbf{1} - \mathbf{e}^{-\mathbf{a}\mathbf{T}}\mathbf{z}^{-\mathbf{1}}\cos \omega \mathbf{T}}{\mathbf{1} - \mathbf{2}\mathbf{e}^{-\mathbf{a}\mathbf{T}}\mathbf{z}^{-\mathbf{1}}\cos \omega \mathbf{T} + \mathbf{e}^{-\mathbf{2}\mathbf{a}\mathbf{T}}\mathbf{z}^{-\mathbf{2}}} \\
&= \frac{\mathbf{z}(\mathbf{z} - \mathbf{e}^{-\mathbf{a}\mathbf{T}}\cos \omega \mathbf{T})}{\mathbf{z}^{\mathbf{2}} - \mathbf{2}\mathbf{e}^{-\mathbf{a}\mathbf{T}}\mathbf{z}\cos \omega \mathbf{T} + \mathbf{e}^{-\mathbf{2}\mathbf{a}\mathbf{T}}} \qquad |\mathbf{z}| > \mathbf{e}^{-\mathbf{a}\mathbf{T}}
\end{aligned}$$

- **Funzione sinusoidale smorzata**

$$\mathbf{x(t)} = \begin{cases} \mathbf{e^{-at}\sin\omega t} & \mathbf{t \geq 0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{t < 0} \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{X(z)} &= \mathcal{Z}\left[\mathbf{e^{-at}\sin\omega t}\right] \\ &= \frac{\mathbf{e^{-aT}z^{-1}\sin\omega T}}{\mathbf{1 - 2e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T + e^{-2aT}z^{-2}}} \\ &= \frac{\mathbf{e^{-aT}z\sin\omega T}}{\mathbf{z^2 - 2e^{-aT}z\cos\omega T + e^{-2aT}}} \qquad |\mathbf{z}| > \mathbf{e^{-aT}} \end{aligned}$$

- Le trasformate delle funzioni di maggior interesse sono solitamente riportate in **tabelle**

lezione 3

- **Esempio**: $\mathbf{X(s)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s(s+1)}}$

- Prima tecnica: $\mathbf{x(t)} = \mathbf{1 - e^{-t}}$

$$\begin{aligned} \mathbf{X(z)} &= \mathcal{Z}\left[\mathbf{1 - e^{-t}}\right] = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1 - z^{-1}}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1 - e^{-T}z^{-1}}} \\ &= \frac{\mathbf{(1 - e^{-T})z^{-1}}}{\mathbf{(1 - z^{-1})(1 - e^{-T}z^{-1})}} = \frac{\mathbf{(1 - e^{-T})z}}{\mathbf{(z - 1)(z - e^{-T})}} \end{aligned}$$

- Seconda tecnica:

$$\mathbf{X(s)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s(s+1)}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+s}}$$

$$\mathbf{X(z)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1 - z^{-1}}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1 - e^{-T}z^{-1}}}$$

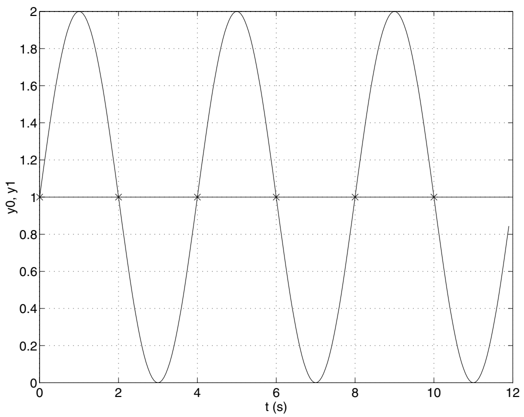
- La $\mathcal{Z}$-trasformata $\mathbf{X(z)}$ e la sua sequenza corrispondente $\mathbf{x(k)}$ sono legate da una **corrispondenza biunivoca**

- Questo **non** avviene in genere tra la $\mathcal{Z}$-trasformata $\mathbf{X(z)}$ e la sua “inversa” $\mathbf{x(t)}$

- Data una $\mathbf{X(z)}$ si possono in genere avere **molte** $\mathbf{x(t)}$

- Questa ambiguità **non** sussiste se sono verificate le condizioni restrittive su $\mathbf{T}$ dettate dal **Teorema di Shannon**

- **Diverse** funzioni tempo continuo possono avere gli **stessi** valori $\mathbf{x(k)}$



- **PROPRIETÀ E TEOREMI DELLA $\mathcal{Z}$-TRASFORMATA**

- **Linearità**:

$$\mathbf{x(k) = af(k) + bg(k)}$$
$$\mathbf{X(z) = aF(z) + bG(z)}$$

- **Moltiplicazione per $\mathbf{a^k}$**. Sia $\mathbf{X(z)}$ la $\mathcal{Z}$-trasformata di $\mathbf{x(t)}$, $\mathbf{a}$ una costante.

$$\mathcal{Z}\left[\mathbf{a^k x(k)}\right] = \mathbf{X(a^{-1}z)}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left[\mathbf{a^k x(k)}\right] &= \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{a^k x(k) z^{-k}} = \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{x(k)(a^{-1}z)^{-k}} \\ &= \mathbf{X(a^{-1}z)}\end{aligned}$$

- **Teorema della traslazione nel tempo**. Se $\mathbf{x(t) = 0, t < 0}$, $\mathbf{X(z)} = \mathcal{Z}[\mathbf{x(t)}]$, e $\mathbf{n = 1, 2, \ldots}$, allora

$$\mathcal{Z}[\mathbf{x(t - nT)}] = \mathbf{z^{-n} X(z)} \qquad \text{(ritardo)}$$

$$\mathcal{Z}[\mathbf{x(t + nT)}] = \mathbf{z^n}\left[\mathbf{X(z)} - \sum_{\mathbf{k=0}}^{\mathbf{n-1}} \mathbf{x(kT) z^{-k}}\right] \qquad \text{(anticipo)}$$

Operativamente:

$$\mathbf{z^{-1} x(k) = x(k-1)}$$
$$\mathbf{z^{-2} x(k) = x(k-2)}$$
$$\mathbf{z\ x(k) = x(k+1)}$$

e così via.

- **Caso di ritardo**:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[\mathbf{x(t - nT)}] &= \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{x(kT - nT) z^{-k}} \\ &= \mathbf{z^{-n}} \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{x(kT - nT) z^{-(k-n)}}\end{aligned}$$

da cui, ponendo $\mathbf{m = k - n}$,

$$\mathcal{Z}[\mathbf{x(t - nT)}] = \mathbf{z^{-n}} \sum_{\mathbf{m=-n}}^{\infty} \mathbf{x(mT) z^{-m}}$$

Poichè $\mathbf{x(mT) = 0}$ per $\mathbf{m < 0}$, allora si può scrivere che

$$\mathcal{Z}[\mathbf{x(t - nT)}] = \mathbf{z^{-n}} \sum_{\mathbf{m=0}}^{\infty} \mathbf{x(mT) z^{-m}} = \mathbf{z^{-n} X(z)}$$

- **Caso dell'anticipo**:

$$\mathcal{Z}[\mathbf{x}(\mathbf{t}+\mathbf{nT})] =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT+nT)z^{-k} = z^{n}\sum_{k=0}^{\infty} x(kT+nT)z^{-(k+n)} \\
&= z^{n}\left[\sum_{k=0}^{\infty} x(kT+nT)z^{-(k+n)} + \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k} \right. \\
&\qquad \left. - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}\right] \\
&= z^{n}\left[\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}\right] \\
&= z^{n}\left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}\right]
\end{aligned}$$

- **Teorema del valore iniziale**.
  Se $\mathbf{X}(\mathbf{z})$ è la $\mathcal{Z}$-trasformata di $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ e se esiste il $\lim_{z\to\infty} \mathbf{X}(\mathbf{z})$, allora il valore iniziale $\mathbf{x}(\mathbf{0})$ di $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ è dato da:

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

Infatti, si noti che

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots$$

- **Teorema del valore finale**. Siano tutti i poli di $\mathbf{X(z)}$ all'interno del cerchio unitario, con al più un polo semplice per $\mathbf{z = 1}$.

$$\lim_{\mathbf{k}\to\infty} \mathbf{x(k)} = \lim_{\mathbf{z}\to\mathbf{1}} \left[(\mathbf{1} - \mathbf{z}^{-\mathbf{1}})\mathbf{X(z)}\right]$$

Infatti

$$\sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{x(k)z^{-k}} - \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{x(k-1)z^{-k}} = \mathbf{X(z)} - \mathbf{z^{-1}X(z)}$$

$$\lim_{\mathbf{z}\to\mathbf{1}} \left[\sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{x(k)z^{-k}} - \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{x(k-1)z^{-k}}\right] =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} [\mathbf{x(k)} - \mathbf{x(k-1)}] \\ &= [\mathbf{x(0)} - \mathbf{x(-1)}] + [\mathbf{x(1)} - \mathbf{x(0)}] + [\mathbf{x(2)} - \mathbf{x(1)}] + \cdots \\ &= \lim_{\mathbf{k}\to\infty} \mathbf{x(k)} \end{aligned}$$

- **Esempio**: Si consideri il segnale descritto da

$$\mathbf{X(z)} = \frac{\mathbf{Tz(z+1)}}{\mathbf{2(z-0.5)(z-1)}}$$

Il valore finale della sequenza $\mathbf{x(kT)}$ è quindi dato da

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{k}\to\infty} \mathbf{x(kT)} &= \lim_{\mathbf{z}\to\mathbf{1}} (\mathbf{1} - \mathbf{z}^{-\mathbf{1}}) \frac{\mathbf{Tz(z+1)}}{\mathbf{2(z-0.5)(z-1)}} \\ &= \lim_{\mathbf{z}\to\mathbf{1}} \frac{\mathbf{T(z+1)}}{\mathbf{2(z-0.5)}} \\ &= \mathbf{2T} \end{aligned}$$

- **Differenziazione complessa**:

$$\mathcal{Z}[\mathbf{k\,x(k)}] = -\mathbf{z}\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d\,z}}\mathbf{X(z)}$$

$$\mathcal{Z}[\mathbf{k^m\,x(k)}] = \left(-\mathbf{z}\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d\,z}}\right)^{\mathbf{m}}\mathbf{X(z)}$$

- **Esempio**: È noto che la $\mathcal{Z}$-trasformata del gradino unitario è

$$\mathcal{Z}[\mathbf{h}(\mathbf{k})] = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \mathbf{z}^{-1}}$$

Per ottenere la trasformata del segnale rampa unitaria

$$\mathbf{x}(\mathbf{k}) = \mathbf{kT}, \qquad \mathbf{k} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots$$

$$\mathcal{Z}[\mathbf{kT}\,\mathbf{h}(\mathbf{k})] = -\mathbf{Tz}\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\,\mathbf{z}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \mathbf{z}^{-1}}\right) = \mathbf{T}\frac{\mathbf{z}^{-1}}{(\mathbf{1} - \mathbf{z}^{-1})^{2}}$$

- **Integrazione complessa**.

Si consideri la sequenza

$$\mathbf{g}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{x}(\mathbf{k})}{\mathbf{k}}$$

dove $\mathbf{x}(\mathbf{k})/\mathbf{k}$ è finito per $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, e sia $\mathcal{Z}[\mathbf{x}(\mathbf{k})] = \mathbf{X}(\mathbf{z})$. La $\mathcal{Z}$-trasformata di $\mathbf{x}(\mathbf{k})/\mathbf{k}$ è data da

$$\mathcal{Z}\left[\frac{\mathbf{x}(\mathbf{k})}{\mathbf{k}}\right] = \int_{\mathbf{z}}^{\infty} \frac{\mathbf{X}(\zeta)}{\zeta}\mathbf{d}\zeta + \lim_{\mathbf{k}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}(\mathbf{k})}{\mathbf{k}}$$

- **Teorema della convoluzione reale**. Siano date due funzioni $\mathbf{x}_1(\mathbf{t})$ e $\mathbf{x}_2(\mathbf{t})$, con $\mathbf{x}_1(\mathbf{t}) = \mathbf{x}_2(\mathbf{t}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{t} < \mathbf{0}$ e $\mathcal{Z}$-trasformate $\mathbf{X}_1(\mathbf{z}), \mathbf{X}_2(\mathbf{z})$. Allora

$$\mathbf{X}_1(\mathbf{z})\mathbf{X}_2(\mathbf{z}) = \mathcal{Z}\left[\sum_{\mathbf{h}=\mathbf{0}}^{\mathbf{k}} \mathbf{x}_1(\mathbf{hT})\mathbf{x}_2(\mathbf{kT} - \mathbf{hT})\right]$$

Per la dimostrazione, si noti che

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left[\sum_{\mathbf{h}=\mathbf{0}}^{\mathbf{k}} \mathbf{x}_1(\mathbf{h})\mathbf{x}_2(\mathbf{k} - \mathbf{h})\right] &= \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\infty}\sum_{\mathbf{h}=\mathbf{0}}^{\mathbf{k}} \mathbf{x}_1(\mathbf{h})\mathbf{x}_2(\mathbf{k} - \mathbf{h})\mathbf{z}^{-\mathbf{k}} \\ &= \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\infty}\sum_{\mathbf{h}=\mathbf{0}}^{\infty} \mathbf{x}_1(\mathbf{h})\mathbf{x}_2(\mathbf{k} - \mathbf{h})\mathbf{z}^{-\mathbf{k}}\end{aligned}$$

poichè $\mathbf{x}_2(\mathbf{k} - \mathbf{h}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{h} > \mathbf{k}$. Definendo $\mathbf{m} = \mathbf{k} - \mathbf{h}$ si ha

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{\mathbf{h}=\mathbf{0}}^{\mathbf{k}} \mathbf{x}_1(\mathbf{h})\mathbf{x}_2(\mathbf{k} - \mathbf{h})\right] = \sum_{\mathbf{h}=\mathbf{0}}^{\infty} \mathbf{x}_1(\mathbf{h})\mathbf{z}^{-\mathbf{h}} \sum_{\mathbf{m}=\mathbf{0}}^{\infty} \mathbf{x}_2(\mathbf{m})\mathbf{z}^{-\mathbf{m}}$$

- **Teorema della convoluzione complessa**.

  Siano date due successioni $\mathbf{x_1(k), x_2(k)}$ nulle per $\mathbf{k < 0}$. Inoltre siano $\mathbf{X_1(z)}$ e $\mathbf{X_2(z)}$ le trasformate delle due successioni e siano $\mathbf{R_1, R_2}$ i rispettivi raggi di convergenza. Allora la $\mathcal{Z}$-trasformata del prodotto $\mathbf{x_1(k)x_2(k)}$ è data da:

$$\mathcal{Z}[\mathbf{x_1(k)x_2(k)}] = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\pi j}} \oint_{\mathbf{C}} \zeta^{-1}\mathbf{X_2}(\zeta)\mathbf{X_1}(\zeta^{-1}\mathbf{z})\mathbf{d}\zeta$$

- **Teorema di Parseval**. Siano date due sequenze $\mathbf{x_1(k), x_2(k)}$ nulle per $\mathbf{k < 0}$. Inoltre siano $\mathbf{X_1(z)}$ e $\mathbf{X_2(z)}$ le trasformate delle due successioni.

$$\begin{aligned}
[\mathcal{Z}[\mathbf{x_1(k)x_2(k)}]]_{|\mathbf{z}|=\mathbf{1}} &= \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{x_1(k)x_2(k)} \\
&= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\pi j}} \oint_{\mathbf{C}} \zeta^{-1}\mathbf{X_2}(\zeta)\mathbf{X_1}(\zeta^{-1}\mathbf{z})\mathbf{d}\zeta
\end{aligned}$$

  Per $\mathbf{x_1(k) = x_2(k) = x(k)}$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{x^2(k)} &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\pi j}} \oint_{\mathbf{C}} \zeta^{-1}\mathbf{X}(\zeta)\mathbf{X}(\zeta^{-1})\mathbf{d}\zeta \\
&= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\pi j}} \oint_{\mathbf{C}} \mathbf{z^{-1}X(z)X(z^{-1})dz}
\end{aligned}$$

- **Trasformazione di funzioni periodiche**.

  Sia data una successione $\mathbf{x_p(k)}$ periodica di periodo $\mathbf{pT}$ e $\mathbf{x(k)}$ la successione dei campioni del primo periodo e nulla per $\mathbf{k > p}$

$$\mathbf{x(k)} = \begin{cases} \mathbf{x_p(k)} & \mathbf{k = 0, \ldots, p} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k > p} \end{cases}$$

  Se $\mathbf{X(z)}$ è la $\mathcal{Z}$-trasformata di $\mathbf{x(k)}$ allora vale

$$\mathcal{Z}[\mathbf{x_p(k)}] = \frac{\mathbf{z^p}}{\mathbf{z^p - 1}}\mathbf{X(z)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1 - z^{-p}}}\mathbf{X(z)}$$

Lezione 4

Antitrasformata zeta.

- **LA ANTITRASFORMATA $\mathcal{Z}$**

- Permette di passare da una $\mathcal{Z}$-trasformata $\mathbf{X(z)}$ alla corrispondente sequenza $\mathbf{x_k}$ e possibilmente alla funzione continua $\mathbf{x(t)}$ cui corrisponde per campionamento la sequenza $\mathbf{x_k}$.

$$\mathbf{X(z)} \;\underset{\textbf{biunivoca}}{\longleftrightarrow}\; \mathbf{x(k)} \;\underset{\textbf{non biunivoca}}{\longleftarrow}\; \mathbf{x(t)}$$

- Se è soddisfatto il **Teorema di Shannon** sul campionamento, la funzione continua $\mathbf{x(t)}$ può essere univocamente determinata a partire dalla sequenza $\mathbf{x_k}$.

- Diversi **metodi per antitrasformare** una funzione $\mathbf{X(z)}$:

1) Metodo della lunga divisione;
2) Metodo computazionale;
3) Metodo della scomposizione in fratti semplici;
4) Metodo dell'integrale di inversione.

- **Metodo della lunga divisione**

$$\mathbf{X(z)} = \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{x(kT)z^{-k}} = \mathbf{x(0)} + \mathbf{x(T)z^{-1}} + \mathbf{x(2T)z^{-2}} + \cdots$$

Si divide il polinomio a numeratore per il polinomio a denominatore con la nota regola di Eulero

$$\mathbf{X(z)} = \frac{\mathbf{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}}{\mathbf{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}} = \mathbf{c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}} + \cdots$$

da cui si ricava che

$$\mathbf{x(0) = c_0}, \quad \mathbf{x(T) = c_1}, \quad \mathbf{x(2\,T) = c_2}, \quad \cdots$$

- **Esempio**: Lunga divisione di:

$$\mathbf{X(z)} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{(1 - z^{-1})^2(1 - 0.5\,z^{-1})}} = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{2 - 5\,z^{-1} + 4\,z^{-2} - z^{-3}}}$$

$$\begin{array}{llllll|l}
6 & & & & & & \dfrac{D(z)}{Q(z)} \\
6 & -15z^{-1} & +12z^{-2} & -3z^{-3} & & & \\
 & +15z^{-1} & -12z^{-2} & +3z^{-3} & & & \\
 & +15z^{-1} & -37.5z^{-2} & +30z^{-3} & -7.5z^{-4} & & \\
 & & +25.5z^{-2} & -27z^{-3} & +7.5z^{-4} & & \\
 & & +25.5z^{-2} & -63.75z^{-3} & +51z^{-4} & -12.75z^{-5} & \\
 & & & +36.75z^{-3} & -43.5z^{-4} & +12.75z^{-5} &
\end{array}$$

Da cui

$$\mathbf{X(z) = 3 + 7.5\,z^{-1} + 12.75\,z^{-2} + 18.375\,z^{-3}} + \cdots$$

$$\mathbf{x(0) = 3}, \quad \mathbf{x(1) = 7.5}, \quad \mathbf{x(2) = 12.75}, \quad \mathbf{x(3) = 18.375}, \quad \cdots$$

- **Metodo computazionale**. Esempio:

$$\mathbf{X(z)} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{-0.5z^{-3} + 2z^{-2} - 2.5z^{-1} + 1}}$$

$$\mathbf{X(z)} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{-0.5z^{-3} + 2z^{-2} - 2.5z^{-1} + 1}}\mathbf{U(z)}$$
$$\mathbf{X(z)\left(1 - 2.5z^{-1} + 2z^{-2} - 0.5z^{-3}\right) = 3U(z)}$$
$$\mathbf{x(k) = 2.5x(k-1) - 2x(k-2) + 0.5x(k-3) + 3u(k)}$$

Per $\mathbf{k = 0}$, $\mathbf{u(0) = 1}$, $\mathbf{x(-1) = x(-2) = x(-3) = 0}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x(0)} &= \mathbf{3} \\
\mathbf{x(1)} &= \mathbf{2.5x(0) = 7.5} \\
\mathbf{x(2)} &= \mathbf{2.5x(1) - 2x(0) = 12.75} \\
\mathbf{x(3)} &= \mathbf{2.5x(2) - 2x(1) + 0.5x(0) = 18.375} \\
&\dots
\end{aligned}$$

- **Metodo della scomposizione in fratti semplici**

$$\mathbf{X(z)} = \frac{\mathbf{b_0z^m + b_1z^{m-1} + \cdots + b_{m-1}z + b_m}}{\mathbf{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)}}$$

- **Caso 1**. Se tutti i poli sono semplici, si pone

$$\mathbf{X(z)} = \frac{\mathbf{c_1}}{\mathbf{z-p_1}} + \frac{\mathbf{c_2}}{\mathbf{z-p_2}} + \cdots + \frac{\mathbf{c_n}}{\mathbf{z-p_n}} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{c_i}}{\mathbf{z-p_i}}$$

dove i coefficienti $\mathbf{c_i}$, detti “residui”, sono parametri che vengono calcolati come:

$$\mathbf{c_i = [(z-p_i)X(z)]_{z=p_i}}$$

- Se nella espressione di $\mathbf{X(z)}$ compare almeno **uno zero nell'origine**, si utilizza la funzione $\mathbf{X(z)/z}$ e quindi

$$\frac{\mathbf{X(z)}}{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{c_1}}{\mathbf{z-p_1}} + \cdots + \frac{\mathbf{c_n}}{\mathbf{z-p_n}} \qquad \mathbf{c_i} = \left[\mathbf{(z-p_i)}\frac{\mathbf{X(z)}}{\mathbf{z}}\right]_{\mathbf{z=p_i}}$$

Quando sono presenti **poli complessi coniugati**, i coefficienti $\mathbf{c_i}$ sono anch'essi complessi. In questo caso si ricorre alle formule di Eulero per ottenere funzioni trigonometriche. L'espressione finale cercata è quindi

$$\mathbf{x(k)} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{c_i p_i^k}$$

- **Caso 2**. Se $\mathbf{X}(\mathbf{z})$, o $\mathbf{X}(\mathbf{z})/\mathbf{z}$, ha **poli multipli**

$$\mathbf{X}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{z})}{\mathbf{A}(\mathbf{z})} = \frac{\mathbf{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}}{\mathbf{(z - p_1)^{r_1}(z - p_2)^{r_2} \cdots (z - p_h)^{r_h}}}$$

allora si può porre

$$\mathbf{X}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{h}} \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{r_i}} \frac{\mathbf{c_{ik}}}{\mathbf{(z - p_i)^{r_i - k + 1}}}$$

dove i residui si calcolano come

$$\mathbf{c_{ik}} = \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(k-1)!}} \frac{\mathbf{d^{k-1}}}{\mathbf{dz^{k-1}}} \mathbf{(z - p_i)^{r_i} X(z)} \right]_{\mathbf{z = p_i}}$$

$$\mathbf{i = 1, \ldots, h;\ k = 1, \ldots, r_i}$$

- **Esempio**. Antitrasformare la funzione

$$\mathbf{X}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{z^4 + 6z^3 + 13z^2 + 12z + 4}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(z+2)^2 (z+1)^2}}$$

Si ha che

$$\mathbf{X}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{c_{11}}}{\mathbf{(z+2)^2}} + \frac{\mathbf{c_{12}}}{\mathbf{(z+2)}} + \frac{\mathbf{c_{21}}}{\mathbf{(z+1)^2}} + \frac{\mathbf{c_{22}}}{\mathbf{(z+1)}}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{c_{11}} &= \left[\mathbf{(z+2)^2 X(z)} \right]\Big|_{\mathbf{z=-2}} = \mathbf{1} \\
\mathbf{c_{12}} &= \left[\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dz}} \mathbf{(z+2)^2 X(z)} \right]_{\mathbf{z=-2}} = \mathbf{2} \\
\mathbf{c_{21}} &= \left[\mathbf{(z+1)^2 X(z)} \right]_{\mathbf{z=-1}} = \mathbf{1} \\
\mathbf{c_{22}} &= \left[\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dz}} \mathbf{(z+1)^2 X(z)} \right]_{\mathbf{z=-1}} = \mathbf{-2}
\end{aligned}$$

- Metodo dell'**integrale di inversione**

$$\mathbf{x(kT)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\pi j}} \oint_{\mathbf{C}} \mathbf{X(z) z^{k-1} dz}, \qquad \mathbf{k = 0, 1, 2, \ldots}$$

Si può applicare il **teorema dei residui**

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\pi j}} \oint_{\mathbf{C}} \mathbf{X(z) z^{k-1} dz} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{m}} \mathbf{k_i}$$

Per poli semplici

$$\mathbf{k_i} = \lim_{\mathbf{z \to z_i}} \left[\mathbf{(z - z_i) X(z) z^{k-1}} \right]$$

Per poli di molteplicità $\mathbf{r_i}$

$$\mathbf{k_i} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(r_i - 1)!}} \lim_{\mathbf{z \to z_i}} \frac{\mathbf{d^{r_i - 1}}}{\mathbf{dz^{r_i - 1}}} \left[\mathbf{(z - z_i)^{r_i} X(z) z^{k-1}} \right]$$

- **Esempio**. Calcolare $x(kT)$ da

$$X(z) = \frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

$$X(z)z^{k-1} = \frac{(1-e^{-aT})z^k}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

$$x(kT) = \sum_{i=1}^{2} \left[\text{residuo di } \tfrac{(1-e^{-aT})z^k}{(z-1)(z-e^{-aT})} \text{ in } z = z_i \right]$$

dove i residui sono

$$k_1 = \lim_{z\to 1} \left[(z-1)\frac{(1-e^{-aT})z^k}{(z-1)(z-e^{-aT})} \right] = 1$$

$$k_2 = \lim_{z\to e^{-aT}} \left[(z-e^{-aT})\frac{(1-e^{-aT})z^k}{(z-1)(z-e^{-aT})} \right] = -e^{-akT}$$

- **Esempio**: $X(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}$

$$X(z)z^{k-1} = \frac{z^{k+1}}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}$$

$$x(kT) = \sum_{i=1}^{2} \left[\text{residuo di } \tfrac{z^{k+1}}{(z-1)^2(z-e^{-aT})} \text{ in } z = z_i \right]$$

$$k_1 = \lim_{z\to e^{-aT}} \left[\frac{(z-e^{-aT})z^{k+1}}{(z-1)^2(z-e^{-aT})} \right] = \frac{e^{-a(k+1)T}}{(1-e^{-aT})^2}$$

$$k_2 = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz} \left[(z-1)^2 \frac{z^{k+1}}{(z-1)^2(z-e^{-aT})} \right]$$

$$= \frac{k+1}{1-e^{-aT}} - \frac{1}{(1-e^{-aT})^2}$$

- **Esempio**. Antitrasformare la funzione

$$X(z) = \frac{10}{(z-1)(z-2)}$$

Si noti che ora

$$X(z)z^{k-1} = \frac{10z^{k-1}}{(z-1)(z-2)}$$

Per $k = 0$

$$X(z)z^{k-1}\big|_{k=0} = \frac{10}{z(z-1)(z-2)}$$

la funzione ha quindi **3 poli semplici**, $z = 0, z = 1, z = 2$, mentre per $k > 0$ $X(z)z^{k-1}$ ha solo i **due poli** $z = 1, z = 2$. Questi due casi sono quindi da considerarsi separatamente.

- **Caso $k = 0$**. Si ottiene

$$x(0) = \sum_{i=1}^{3} \left[\text{residuo di } \tfrac{10}{z(z-1)(z-2)} \text{ nel polo } z = z_i \right]$$

ove i residui valgono

$$k_1 = \lim_{z\to 0} \left[z\frac{10}{z(z-1)(z-2)} \right] = 5$$

$$k_2 = \lim_{z\to 1} \left[(z-1)\frac{10}{z(z-1)(z-2)} \right] = -10$$

$$k_3 = \lim_{z\to 2} \left[(z-2)\frac{10}{z(z-1)(z-2)} \right] = 5$$

e quindi

$$x(0) = k_1 + k_2 + k_3 = 5 - 10 + 5 = 0$$

- **Caso** $k > 0$. Si ottiene ora

$$x(k) = \sum_{i=1}^{2} \left[\text{residuo di } \frac{10z^{k-1}}{(z-1)(z-2)} \text{ nel polo } z = z_i \right]$$

ove i residui valgono

$$k_1 = \lim_{z \to 1} \left[(z-1) \frac{10z^{k-1}}{(z-1)(z-2)} \right] = -10$$

$$k_2 = \lim_{z \to 2} \left[(z-2) \frac{10z^{k-1}}{(z-1)(z-2)} \right] = 10(2^{k-1})$$

e quindi

$$x(k) = k_1 + k_2 = -10 + 10(2^{k-1}) = 10(2^{k-1} - 1)$$

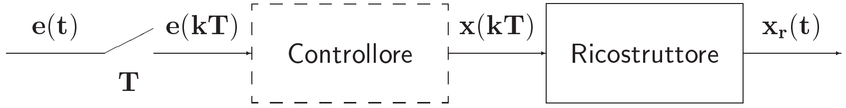
In definitiva si ottiene

$$x(k) = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ 10(2^{k-1} - 1) & k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Lezione 5

Campionamento

- I sistemi in retroazione con controllo digitale sono caratterizzati da una **parte continua** (il processo da controllare) e una **parte discreta** (il controllore digitale)
- Sono quindi presenti sia variabili a tempo **discreto** sia variabili a tempo **continuo**
- I dispositivi di interfaccia sono il **campionatore** e il **ricostruttore**



- Ricostruttore di ordine zero:

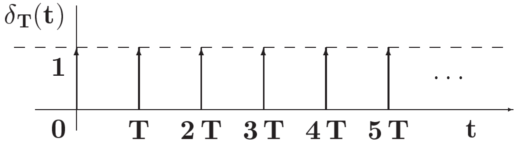
$$\mathbf{x_r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)[h(t-kT) - h(t-(k+1)T)]}$$

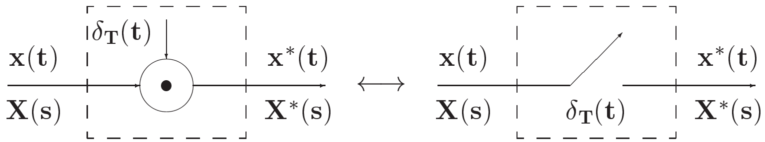
$$\begin{aligned}\mathbf{X_r(s)} &= \mathbf{\sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \left[\frac{e^{-kTs} - e^{-(k+1)Ts}}{s}\right]} \\ &= \mathbf{\frac{1-e^{-Ts}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}}\end{aligned}$$

$$\mathbf{H_0(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}} \qquad \mathbf{X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}}$$

$$\mathbf{x^*(t) = \mathcal{L}^{-1}[X^*(s)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT)}$$

$$\mathbf{\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT)}$$

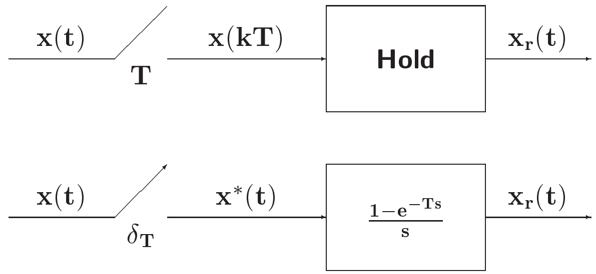




- Il campionatore impulsivo è un modello ideale del campionatore reale (convertitore A/D) considerato adeguato alle esigenze di analisi e progetto dei controlli digitali

- L'uscita del ricostruttore di ordine zero vale:

$$\mathbf{X_r(s) = H_0(s)\, X^*(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} X^*(s)}$$



$$\mathbf{X}^*(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{k}=0}^{\infty} \mathbf{x}(\mathbf{kT})\mathbf{e}^{-\mathbf{kTs}}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{e}^{\mathbf{sT}} \qquad \longleftrightarrow \qquad \mathbf{s} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}} \ln \mathbf{z}$$

$$\mathbf{X}^*(\mathbf{s})\big|_{\mathbf{s}=\frac{1}{\mathbf{T}}\ln \mathbf{z}} = \sum_{\mathbf{k}=0}^{\infty} \mathbf{x}(\mathbf{kT})\,\mathbf{z}^{-\mathbf{k}}$$

- La trasformata zeta della sequenza $\mathbf{x}(\mathbf{kT})$ anzichè la trasformata di Laplace del segnale $\mathbf{x}^*(\mathbf{t})$ permette di operare con funzioni razionali fratte.

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^*(\mathbf{t}) &= \mathbf{x}(\mathbf{t})\,\delta_{\mathbf{T}}(\mathbf{t}) = \mathbf{x}(\mathbf{t}) \textstyle\sum_{\mathbf{n}=-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{t}-\mathbf{nT}) \\
\delta_{\mathbf{T}}(\mathbf{t}) &= \textstyle\sum_{\mathbf{n}=-\infty}^{\infty} \mathbf{c_n}\,\mathbf{e}^{\mathbf{j}\,\mathbf{n}\omega_{\mathbf{s}}\mathbf{t}} \\
\mathbf{c_n} &= \tfrac{1}{\mathbf{T}} \textstyle\int_0^{\mathbf{T}} \delta_{\mathbf{T}}(\mathbf{t})\,\mathbf{e}^{-\mathbf{j}\,\mathbf{n}\omega_{\mathbf{s}}\mathbf{t}}\mathbf{dt} = \tfrac{1}{\mathbf{T}}
\end{aligned}$$

ne segue

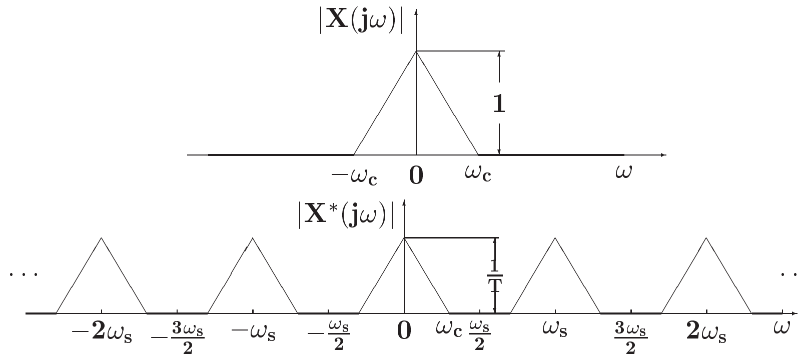
$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^*(\mathbf{t}) &= \mathbf{x}(\mathbf{t})\,\tfrac{1}{\mathbf{T}} \textstyle\sum_{\mathbf{n}=-\infty}^{\infty} \mathbf{e}^{\mathbf{j}\,\mathbf{n}\omega_{\mathbf{s}}\mathbf{t}} \\
&= \tfrac{1}{\mathbf{T}} \textstyle\sum_{\mathbf{n}=-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(\mathbf{t})\,\mathbf{e}^{\mathbf{j}\,\mathbf{n}\omega_{\mathbf{s}}\mathbf{t}}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{X}^*(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}} \sum_{\mathbf{n}=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}\big[\mathbf{x}(\mathbf{t})\,\mathbf{e}^{\mathbf{j}\,\mathbf{n}\omega_{\mathbf{s}}\mathbf{t}}\big] = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}} \sum_{\mathbf{n}=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}(\mathbf{s}-\mathbf{j}\,\mathbf{n}\omega_{\mathbf{s}})$$

- A meno della costante moltiplicativa $\mathbf{1}/\mathbf{T}$, la trasformata di Laplace $\mathbf{X}^*(\mathbf{s})$ del segnale campionato si ottiene dalla somma degli infiniti termini, $\mathbf{X}(\mathbf{s}-\mathbf{j}\,\mathbf{n}\omega_{\mathbf{s}})$, ciascuno dei quali si ottiene dalla $\mathbf{X}(\mathbf{s})$ mediante traslazione di $\mathbf{j}\,\mathbf{n}\omega_{\mathbf{s}}$ nel campo complesso.

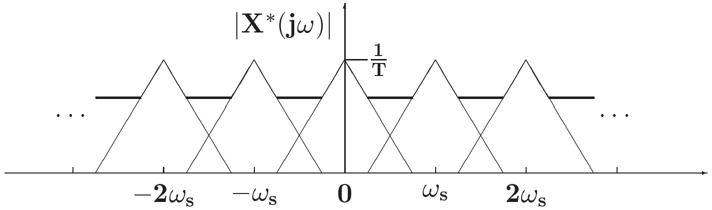
- L'andamento spettrale del segnale campionato vale:

$$\mathbf{X}^*(\mathbf{j}\omega) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}} \sum_{\mathbf{n}=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}(\mathbf{j}\omega-\mathbf{j}\,\mathbf{n}\omega_{\mathbf{s}})$$



- La condizione $\omega_{\mathbf{s}} > \mathbf{2}\omega_{\mathbf{c}}$ mantiene distinto lo spettro originario dalle componenti complementari per cui, mediante filtraggio, è possibile ricostruire completamente il segnale $\mathbf{x}(\mathbf{t})$

- Nel caso in cui la condizione $\omega_s > 2\omega_c$ non è rispettata:



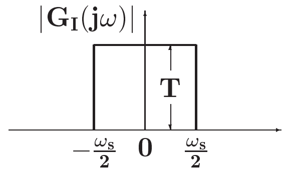
- Lo spettro originario è parzialmente sovrapposto alle componenti complementari contigue per cui mediante filtraggio non è più possibile ricavare il segnale originario a partire dal segnale campionato

- **Teorema di Shannon**
  Sia $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ la pulsazione di campionamento (T è il periodo di campionamento), e sia ω_c la più alta componente spettrale del segnale tempo-continuo $x(t)$. Il segnale $x(t)$ è completamente ricostruibile a partire dal segnale campionato $x^*(t)$ se e solo se la pulsazione ω_s è maggiore del doppio della pulsazione ω_c:

$$\omega_s > 2\omega_c$$

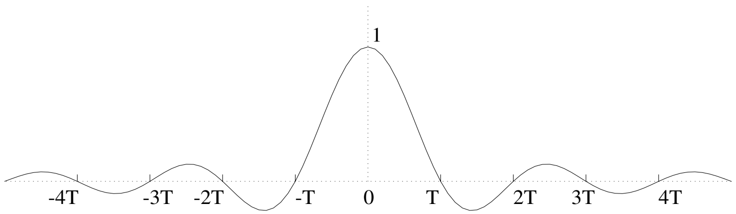
- Ricostruzione mediante filtro ideale

$$G_I(j\omega) = \begin{cases} T & -\frac{\omega_s}{2} \le \omega \le \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



- Il filtro ideale $G_I(j\omega)$ non è fisicamente realizzabile. La sua risposta all'impulso vale:

$$g_I(t) = \frac{\sin(\omega_s t/2)}{\omega_s t/2}$$



- Formula di ricostruzione di Shannon

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)\, g_I(t-\tau)\, d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - kT) \frac{\sin(\omega_s(t-\tau)/2)}{\omega_s(t-\tau)/2}\, d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\sin(\omega_s(t-kT)/2)}{\omega_s(t-kT)/2} \end{aligned}$$

- Occorrono tutti i campioni $x(kT)$ passati e futuri

- Si usano ricostruttori causali e facilmente realizzabili

- **Aliasing**: Con il termine **aliasing** si indica quel fenomeno per il quale, mediante campionamento, si generano delle nuove componenti spettrali (armoniche) alla stessa frequenza della componente spettrale di partenza che impediscono la corretta ricostruzione del segnale di partenza.

- Si può avere aliasing solo nel caso in cui la condizione $\omega_s > 2\omega_c$ del teorema di Shannon non sia verificata

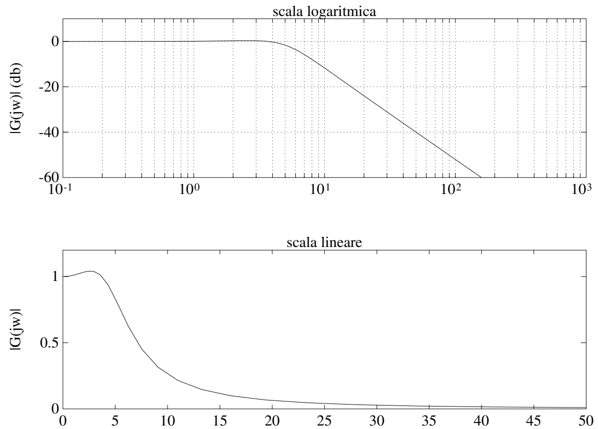
- Campionamento della risposta all'impulso di un sistema del secondo ordine

$$\mathbf{G(s)} = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{s^2 + 6\,s + 25}}$$

- Il sistema $\mathbf{G(s)}$ ha un guadagno statico unitario, ha due poli complessi coniugati $\mathbf{p_{1,2}} = -\mathbf{3} \pm \mathbf{j4}$, pulsazione naturale $\omega_\mathbf{n} = \mathbf{5\ rad/s}$ e coefficiente di smorzamento $\delta = \mathbf{3/5}$

$$\mathbf{G(s)} = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{(s+3)^2 + 4^2}}$$

- Diagramma delle ampiezze di $\mathbf{G(j\omega)}$:



- Per $\omega > \mathbf{10}\omega_\mathbf{n} = \mathbf{50\ rad/s} = \bar{\omega}$, l'ampiezza di $\mathbf{G(j\omega)}$ è inferiore ad un centesimo (-40 db) del guadagno statico

- Lo spettro, pur essendo a banda teoricamente illimitata, risulta essere praticamente trascurabile per pulsazioni maggiori di $\bar{\omega} = \mathbf{50\ rad/s}$

- Applicando la $\mathcal{Z}$-trasformata si ha

$$\mathbf{G(z)} = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{4}} \frac{\mathbf{e^{-3T}} \sin(\mathbf{4T})\ \mathbf{z}}{\mathbf{z^2} - \mathbf{2e^{-3T}} \cos(\mathbf{4T})\ \mathbf{z} + \mathbf{e^{-6T}}}$$

- La risposta spettrale è data da

$$\mathbf{G^*(j\omega)} = \mathbf{G(z)}\big|_{\mathbf{z=e^{j\omega T}}} \qquad \mathbf{0} \le \omega \le \frac{\pi}{\mathbf{T}}$$

- Andamento spettrale di $\mathbf{G}^*(\mathbf{j}\omega)$ quando $\mathbf{T} = \frac{\pi}{50}$ e $\mathbf{T} = \frac{\pi}{25}$