

## Capitolo 8

# Sintonizzazione di Controllori PID

Lo schema del controllo in retroazione di figura 8.1 è comunemente usato nelle applicazioni industriali della teoria del controllo automatico. L'obiettivo dello schema consiste nel forzare la *variabile controllata*  $y(t)$  (l'uscita di un certo sistema da controllare) a seguire il più fedelmente possibile una *variabile di riferimento*  $r(t)$  definita da un generatore di riferimento [9].

Il sistema di controllo viene progettato per raggiungere questa specifica tenendo conto di un modello matematico del sistema e dell'attuatore, vale a dire del sistema di potenza che trasforma il *segnale di controllo*  $v(t)$  generato dal controllore in un *segnale di potenza*  $u(t)$  in grado agire sul sistema da controllare.

Il sistema di controllo acquisisce la misura della variabile da controllare tramite un sensore che fornisce una variabile di misura  $\tilde{y}(t)$  proporzionale alla variabile misurata  $y(t)$ , quindi confronta tale valore con il riferimento  $r(t)$ , ottenendo una variabile errore  $e(t)$ . La variabile errore viene infine elaborata dal controllore per calcolare un opportuno valore per il segnale di controllo  $v(t)$ .

Nelle applicazioni industriali sono spesso usati controllori con una struttura fissa costituita da un termine proporzionale (P), un termine integrale (I) e uno derivativo (D). Tali controllori, detti regolatori standard o PID, sono particolarmente apprezzati per la loro semplicità ed efficacia. In questi appunti verrà presentata e discussa la struttura di base di questi regolatori, mostrando metodi analitici di sintesi e affinamenti della struttura di base necessari nelle applicazioni pratiche.

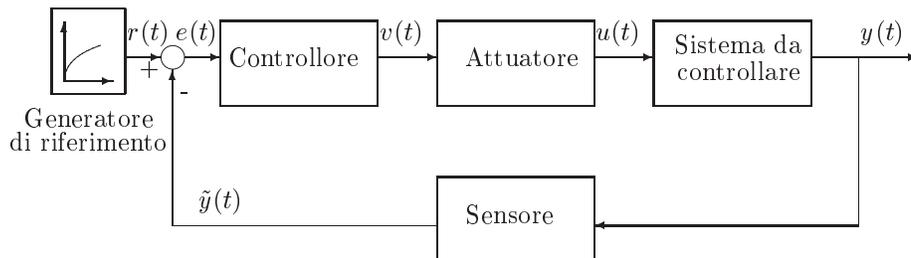


Figura 8.1: Diagrammi a blocchi di un sistema di controllo.

Nel corso della trattazione lo schema di controllo in retroazione di figura 8.1 potrà essere considerato in forma semplificata per favorire la comprensione dei concetti esposti. In particolare potrà essere trascurata la presenza dell'attuatore ( $v(t) = u(t)$ ), ovvero trascurata la presenza del sensore ( $\tilde{y}(t) = y(t)$ ).

## 8.1 Struttura di un PID

Il regolatore PID è un sistema dinamico che elabora il segnale di ingresso errore come differenza fra il riferimento e la variabile controllata  $e(t) = r(t) - y(t)$  per ottenere un segnale di controllo  $u(t)$  fornito in ingresso al sistema da controllare.

Il regolatore PID nella sua forma base, ha una struttura fissa ed è parametrizzabile da tre coefficienti  $K, T_i, T_d$ :

$$u(t) = K \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (8.1)$$

Analizziamo separatamente nel seguito il significato di questi tre termini.

1. In termini statici, un  $K$  elevato riduce l'errore a regime, diminuisce eventuali effetti di disturbo e del rumore sulla variabile controllata. Dal punto di vista dinamico, l'introduzione di un termine proporzionale (P) nell'anello di controllo generalmente produce un incremento della larghezza di banda del sistema retroazionato, per cui si ha un *aumento* della velocità di risposta del sistema, e quindi una maggiore prontezza nell'inseguimento del riferimento, ma, allo stesso tempo, una *diminuzione* dei margini di stabilità del sistema.
2. Dal punto di vista statico, la funzione principale del termine integrale consiste nell'annullare l'errore a regime per un ingresso a gradino. Infatti tale termine integra l'errore nel tempo e quindi un errore costante provoca un incremento dell'azione di controllo fino a che l'errore non si è completamente annullato. In termini dinamici, l'introduzione del termine integrale porta ad un aumento del ritardo di fase della catena diretta di controllo pari a  $\pi/2$ , e quindi determina un peggioramento dei margini di fase ed ampiezza del sistema retroazionato.
3. La funzione principale del termine derivativo consiste nel migliorare i margini di stabilità del sistema fornendo un anticipo di fase all'anello di controllo in retroazione. D'altra parte, il termine derivativo ha la caratteristica di amplificare i segnali con contenuto armonico a frequenze elevate.

## 8.2 Modifiche alla struttura del PID

Nel paragrafo 8.1 è stata introdotta la struttura di base del regolatore PID. Il regolatore PID utilizzato nelle applicazioni industriali ha una struttura più complessa in quanto vi sono problemi di natura pratica che non possono venire risolti utilizzando semplicemente la (8.1). In questo capitolo vedremo una riformulazione della (8.1) utilizzata in applicazioni industriali e l'introduzione di un dispositivo di anti-saturazione del termine integrale nella legge di controllo.

### 8.2.1 Limitazione di banda del termine derivativo

Il termine derivativo del regolatore PID migliora i margini di stabilità dell'anello di controllo ed introduce una azione di correzione dell'errore di tipo anticipativo. Dal punto di vista applicativo vi sono però alcuni importanti aspetti da valutare:

- Il termine derivativo amplifica ed esalta i segnali a larga banda come il rumore elettromagnetico sulla misura.
- La funzione di trasferimento corrispondente al termine derivativo del PID è non propria e quindi non fisicamente realizzabile.
- Il contributo del termine derivativo diviene teoricamente infinito nel caso in cui venga applicato un ingresso di riferimento  $r(t)$  a gradino, introducendo sollecitazioni potenzialmente dannose per gli organi di attuazione.

Per risolvere i problemi citati è possibile filtrare con un sistema del primo ordine l'uscita del termine derivativo, sostituendo quindi tale contributo con un termine con funzione di trasferimento propria:

$$D(S) = \frac{sKT_d}{1 + sT_d/N} \quad (8.2)$$

dove la costante di tempo del filtro ( $T_d/N$ ) è solitamente fissata tra un decimo ed un ventesimo della costante di tempo del termine derivativo  $T_d$ .

Per evitare che segnali di riferimento a banda troppo larga, ad esempio un segnale a gradino, producano delle sollecitazioni troppo forti, è possibile modificare lo schema di base del PID (8.1) come mostrato in figura 8.2. In tale schema viene fornito all'ingresso del termine derivativo la sola misura dell'uscita  $y(t)$ .

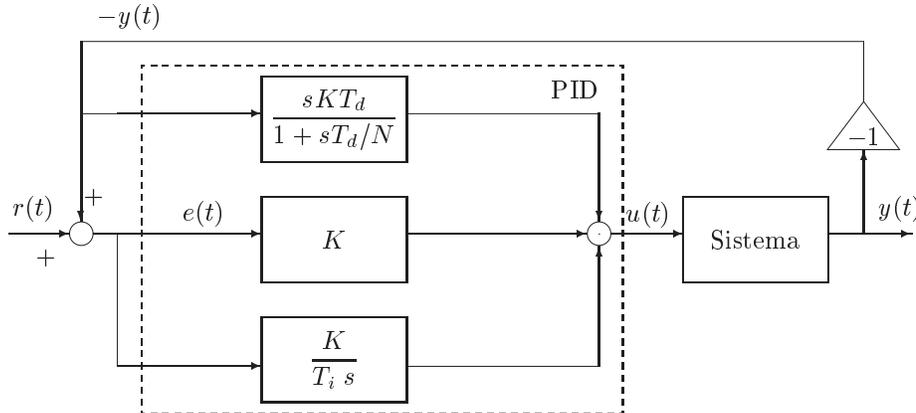


Figura 8.2: Schema a blocchi del PID con limitazione di banda del termine derivativo.

### 8.2.2 “Anti-Windup” del termine integrale.

Gran parte dello studio dei sistemi dinamici viene condotto utilizzando l'approssimazione di linearità del sistema in esame, sia pure nell'intorno di un punto di lavoro. Una delle principali cause di non linearità consiste nella limitazione fisica degli attuatori: la coppia fornita da un motore elettrico è limitata, una valvola non può essere più che completamente chiusa o completamente aperta.

Questo tipo di non-linearità può incidere profondamente sul comportamento del controllore PID. Infatti consideriamo lo schema di figura 8.3,

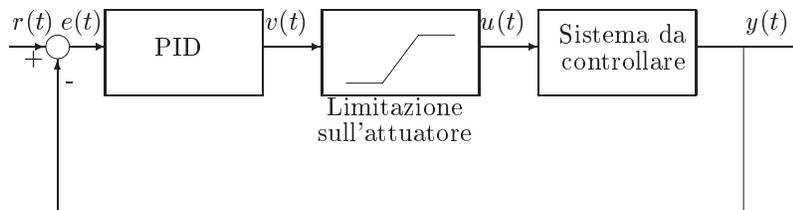


Figura 8.3: Schema a blocchi di un sistema di controllo con limitazione sull'attuatore.

A causa della saturazione dell'attuatore, il valore in uscita dal regolatore PID ( $v(t)$ ) può essere differente da quello della variabile di controllo ( $u(t)$ ). Vi può essere saturazione sul valore della

variabile di controllo ovvero sulla sua derivata temporale. Tali saturazioni possono venire espresse dalle relazioni:

$$u(t) = \begin{cases} u^+; & \text{if } v(t) \geq u^+ \\ v(t); & \text{if } u^- < v(t) < u^+ \\ u^-; & \text{if } v(t) \leq u^- \end{cases} \quad (8.3)$$

$$\frac{du(t)}{dt} = \begin{cases} d^+; & \text{if } \frac{dv(t)}{dt} \geq d^+ \\ \frac{dv(t)}{dt}; & \text{if } d^- < \frac{dv(t)}{dt} < d^+ \\ d^-; & \text{if } \frac{dv(t)}{dt} \leq d^- \end{cases} \quad (8.4)$$

dove  $u^-$ ,  $u^+$ ,  $d^-$  e  $d^+$  sono, rispettivamente, il limite minimo e massimo dell'uscita e della derivata temporale dell'uscita dell'attuatore.

Per capire come la saturazione dell'attuatore influisce sull'azione di controllo del sistema, consideriamo il seguente caso: supponiamo che il sistema si trovi in uno stato di equilibrio (errore nullo). Ad un certo istante viene applicato un gradino al segnale di riferimento  $r(t)$ , che sollecita il controllore a fornire un gradino al segnale di controllo  $v(t)$ . A causa della saturazione il segnale di attuazione  $u(t)$  è più basso di  $v(t)$  e quindi la variazione del segnale controllato, e quindi dell'errore, sarà inferiore rispetto al caso non limitato. A causa della ridotta velocità della decrescita del segnale di errore, il termine integrale aumenta molto di più rispetto al caso privo di limitazione. Quando poi l'errore tende ad annullarsi, il segnale di controllo rimane alto a causa dell'elevato valore dell'integrale, causando quindi una elevata sovraelongazione e un tempo di assestamento più elevato. Questo fenomeno viene chiamato *windup* del PID.

Nel seguito verranno mostrati alcuni schemi per attenuare il problema della saturazione del termine integrale (dispositivi di "anti wind-up").

### Ricalcolo del termine integrale.

Questa tecnica introduce un termine di compensazione  $e_s(t) = v(t) - u(t)$  all'ingresso del termine integrale, con segno opposto a quello del segnale di errore  $e(t)$ . Il segnale di compensazione è nullo fino a che l'uscita del PID non è saturata, mentre fornisce un'azione tendente a diminuire il termine integrale nel caso in cui l'uscita del PID si saturi. In figura 8.4 sono mostrati due schemi di antisaturazione: il primo utilizza una misura diretta della variabile di controllo  $u(t)$ , il secondo impiega una stima di  $u(t)$  ottenuta tramite un modello dell'attuatore.

Il segnale di compensazione del termine integrale viene filtrato da una funzione di trasferimento  $F(s)$  tramite cui è possibile modulare l'azione di desaturazione. Siccome il termine di compensazione entra in un integratore, solitamente la funzione di trasferimento del filtro  $F(s)$  è semplicemente una costante  $1/T_a$ .

Per scegliere correttamente  $T_a$  occorre considerare che per  $T_a$  molto piccoli l'azione di desaturazione è molto veloce, però è anche facilmente soggetta all'azione di disturbi, se  $T_a$  è grande l'azione di desaturazione è lenta.

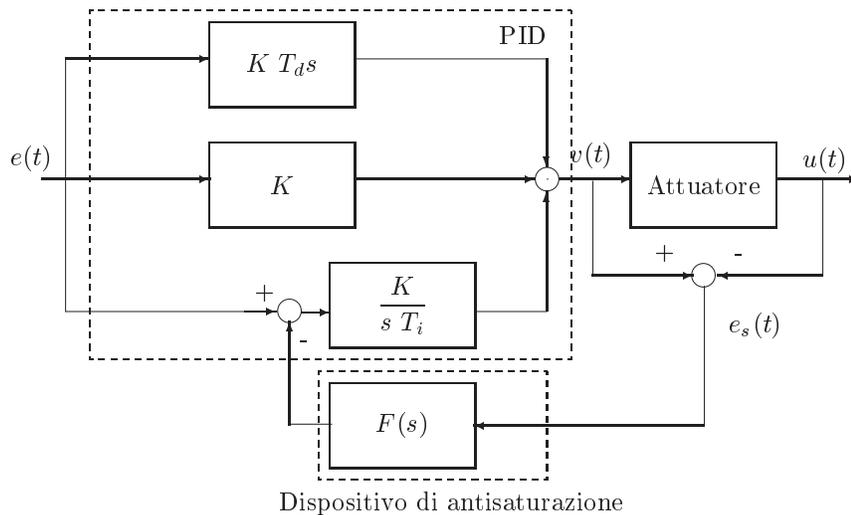
### Integrazione condizionata

In questa tecnica l'ingresso del termine integrale viene azzerato nel caso in cui il segnale di compensazione  $e_s(t) = v(t) - u(t)$  sia non nullo (vedi figura 8.5). Se chiamiamo  $e_i(t)$  il valore di ingresso del termine integrale, allora l'integrazione condizionata si esprime matematicamente:

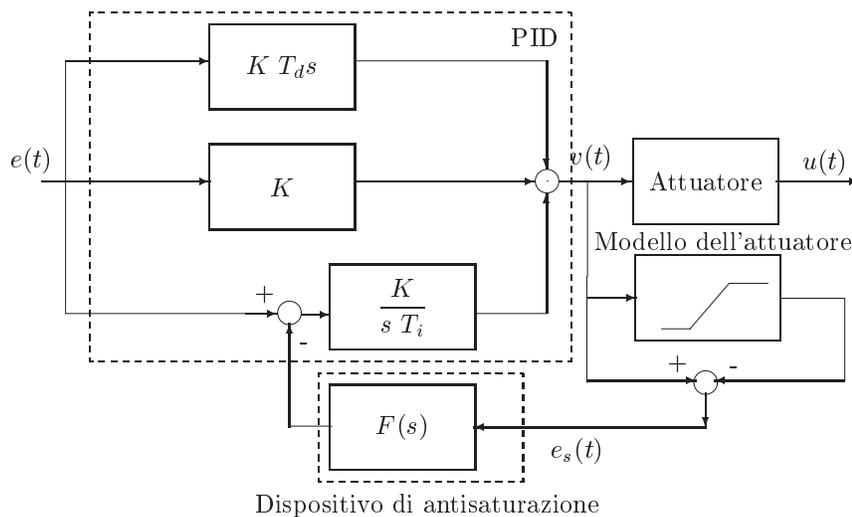
$$e_i(t) = \begin{cases} e(t), & \text{se } v(t) = u(t) \\ 0, & \text{se } v(t) \neq u(t) \end{cases} \quad (8.5)$$

## 8.3 Funzioni e modelli usati nel capitolo

In questo capitolo verranno utilizzati i seguenti files *Maltab* e *Simulink*:



(a) Schema con misura della variabile di attuazione.



(b) Schema con stima della variabile di attuazione.

Figura 8.4: Controllore PID con dispositivo di anti-saturazione del termine integrale mediante ricalcolo del termine integrale.

`sim1 pid.mdl`, sistema in retroazione con PID.

`PIDsat.mdl`, *subsystem* PID con saturazione.

`es1 pid.mdl`, sistema PID e serbatoio.

`es2 pid.mdl`, sistema PID e serbatoio.

`es3 pid.mdl`, sistema PID anti-windup e serbatoio.

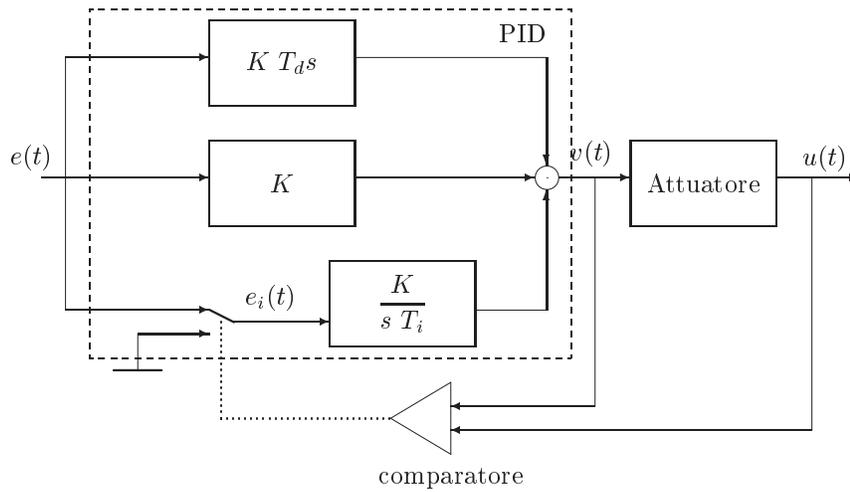


Figura 8.5: Schema di antisaturazione mediante integrazione condizionata.

`data pid.mat`, dati di ingresso per il serbatoio.

`id1 pid.mdl`, identificazione della funzione di trasferimento.

`ziegler.m`, formule di Ziegler-Nichols.

`serbatoio.mdl`, modello del serbatoio.

`sim2 pid.mdl`, schema *Simulink* per l'esercizio 1).

`sim3 pid.mdl`, schema *Simulink* per l'esercizio 2).

`sim4 pid.mdl`, schema *Simulink* per l'esercizio 3).

## 8.4 Controllo di livello di un serbatoio

In questo paragrafo si presenta l'esempio relativo ad un controllo di livello effettuato attraverso un regolatore PID e progettato attraverso specifiche sulla precisione statica.

Si fa riferimento al serbatoio di sezione circolare pari ad  $A$ , con  $A = 10m^2$  rappresentato in Figura 8.6 con un condotto di ingresso per introdurre liquido con portata  $Q_i$  [ $\frac{m^3}{s}$ ] ed uno di uscita, per prelevarne con portata  $Q_o$  [ $\frac{m^3}{s}$ ].

Il sistema dinamico può essere rappresentato secondo uno schema *Simulink* come in Figura 8.7, in cui la portata netta  $Q_n$  viene divisa per la sezione del serbatoio ed integrata, per ottenere l'altezza del liquido rispetto il fondo,  $h$ .

Lo schema del sistema chiuso in retroazione attraverso un controllore PID è rappresentato in Figura 8.8. A valle del PID è stata inserita una saturazione, che limita l'uscita del PID da 0 a 0.2. L'immissione di liquido viene infatti controllata da una valvola rappresentata nello schema di Figura 8.7 e la saturazione tiene conto appunto del limite in portata dovuto alla valvola stessa.

In riferimento allo schema *Simulink* di Figura 8.8, con una portata in uscita pari a  $0.05 \frac{m^3}{s}$ , un riferimento di livello fissato a  $9m$  e un livello iniziale pari a  $10m$

- progettare un PID con il solo termine proporzionale  $K$  tale da garantire un errore di livello inferiore a  $0.005m$ .
- introdurre il termine integrale per annullare l'errore a regime.

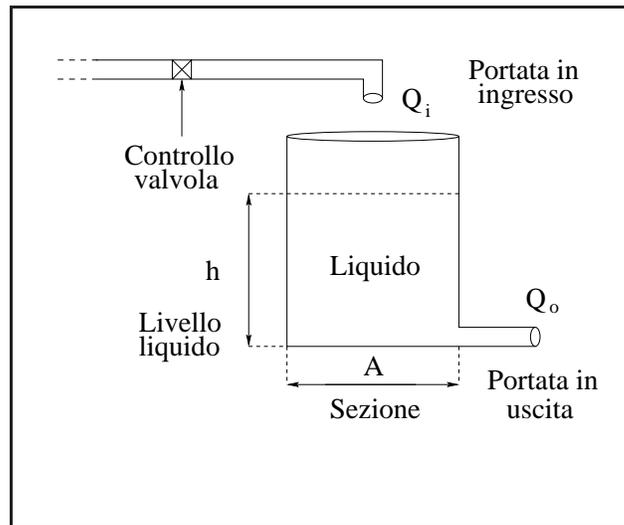


Figura 8.6: Rappresentazione del sistema controllato.

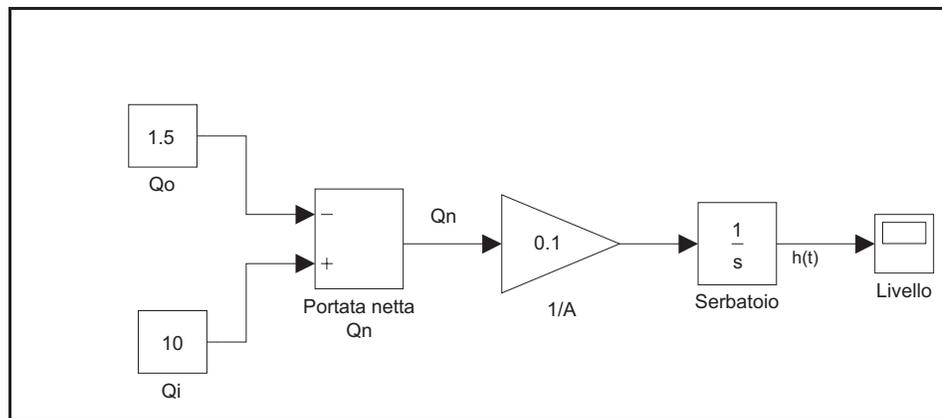


Figura 8.7: Schema *Simulink* del sistema controllato.

Come può essere ricavato dallo schema di Figura 8.9, per avere un errore a regime inferiore allo  $0.005m$  occorre un guadagno superiore a 10.

Tale guadagno garantisce che il sistema lavori in regime lineare, cioè l'uscita del PID non è soggetta alle limitazioni imposte dalla saturazione. Nelle Figure 8.10 sono rappresentati il livello di riferimento  $h_{rif} = 9m$  e il livello del serbatoio  $h(t)$ .

Si osservi l'andamento del segnale di controllo all'uscita del regolatore riportato in Figura 8.11.

Per ottenere l'annullamento dell'errore a regime, si introduce il termine integrale con un guadagno pari a 0.2. Anche questo valore evita l'intervento della saturazione.

Il nuovo regolatore di tipo PI permette di ottenere un errore a regime nullo come evidenziato in Figura 8.12. L'andamento del segnale  $Q_i$  ottenuto attraverso un controllore di tipo PI è riportato in Figura 8.13

## 8.5 Progetto di un PID con le formule di Ziegler-Nichols

In questo paragrafo si effettuerà il progetto di un PID per un sistema descritto da una funzione di trasferimento utilizzando le relazioni di Ziegler-Nichols (modificate da Cohen e Coon) calcolate in base alla funzione di trasferimento approssimata.

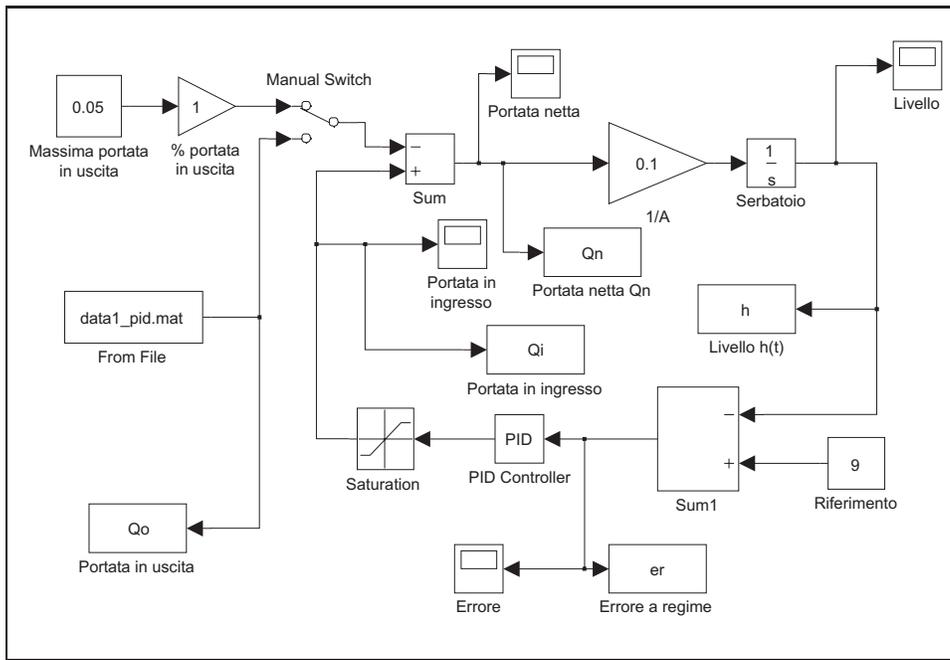


Figura 8.8: Schema *Simulink* del controllo di livello con PID.

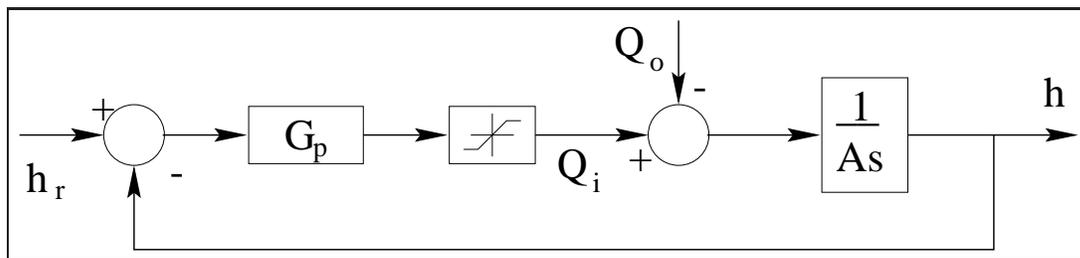


Figura 8.9: Schema a blocchi del controllo di livello con PID.

Si consideri il sistema del quarto ordine descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)(1+0.25s)(1+0.5s)(1+0.75s)} \quad (8.6)$$

che può essere approssimata, utilizzando il *metodo delle aree*, dalla funzione

$$G_a(s) = \frac{e^{-1.0652s}}{(1+1.4348s)}. \quad (8.7)$$

in cui sono stati sostituiti i valori di  $\tau = 1.0652$  e  $T = 1.4348$ . Le relazioni di Ziegler-Nichols sono implementate nella funzione *Matlab* `ziegler.m` che richiede in ingresso  $\tau$ ,  $T$ ,  $C_o$ , il valore di regime della risposta del sistema eccitato da un gradino di ampiezza  $M_o$ .

```
function [P,I,D] = ziegler(tau,T,Mo,Co)
%
% function [P,I,D] = ziegler(tau,T,Mo,Co) per il calcolo dei parametri
% del PID. tau e' il tempo di ritardo, T la costante di tempo, Mo l'ampiezza
% del gradino applicato e Co l'ampiezza a regime della risposta.
%
```

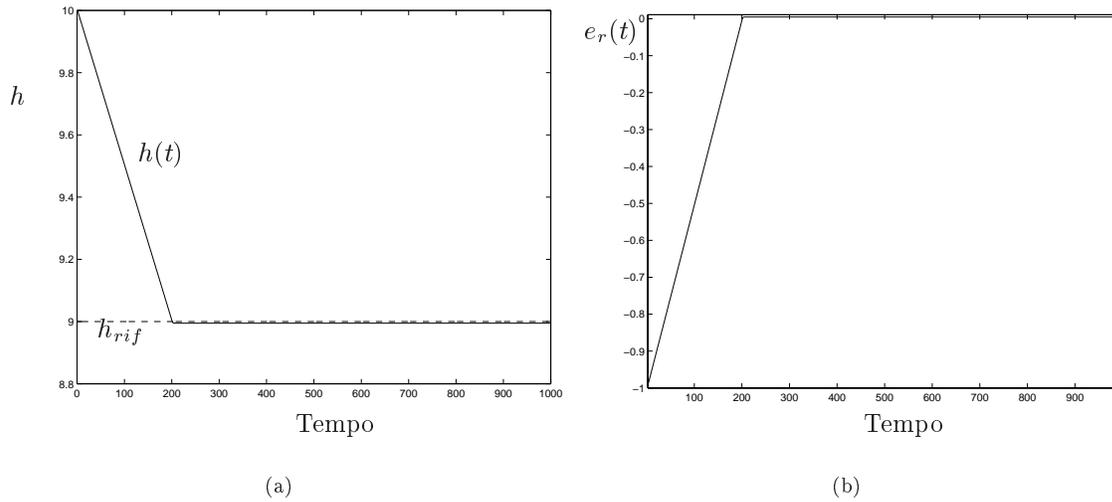


Figura 8.10: Livello del serbatoio e livello di riferimento (a) ed errore a regime (b) con regolatore P.

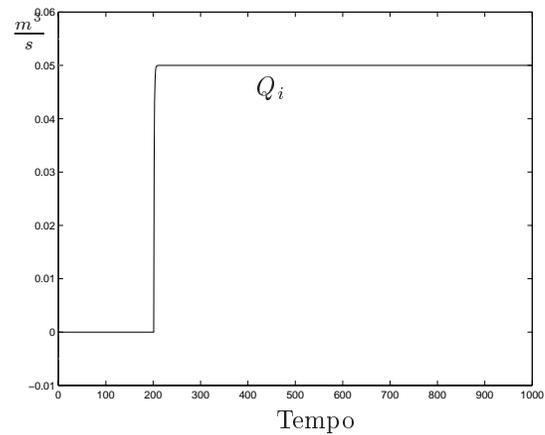


Figura 8.11: Portata in ingresso al serbatoio.

$$R = \tau/T;$$

$$M_o = 1;$$

$$C_o = 1;$$

$$N = C_o/T;$$

$$P = M_o \cdot (4/3 + R/4) / (N \cdot \tau);$$

$$I = (\tau \cdot (32 + 6 \cdot R)) / (13 + 8 \cdot R);$$

$$D = (4 \cdot \tau) / (11 + 2 \cdot R);$$

Si ottengono i seguenti valori per i parametri del PID

>> P

P =

2.0460

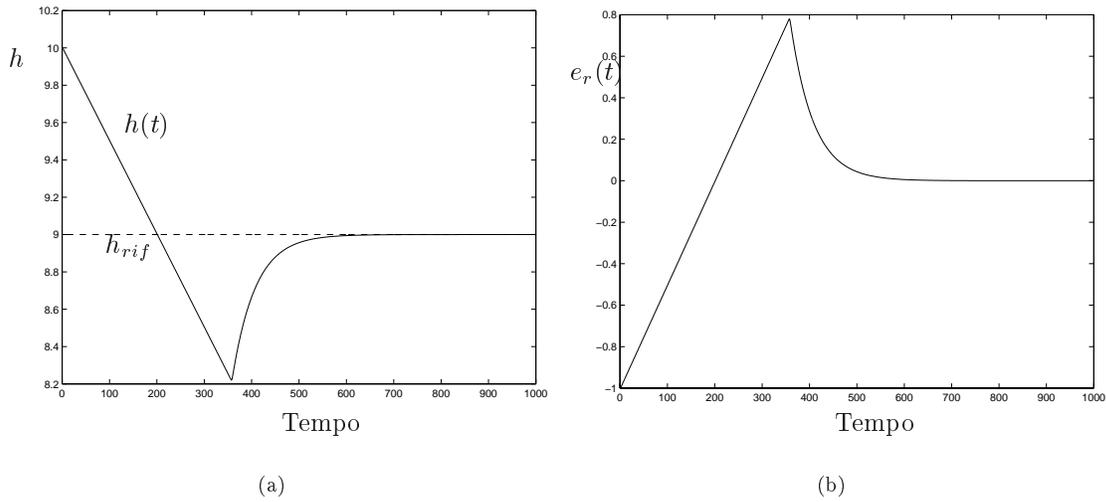


Figura 8.12: Livello del serbatoio e livello di riferimento (a) ed errore a regime (b) con regolatore PI.

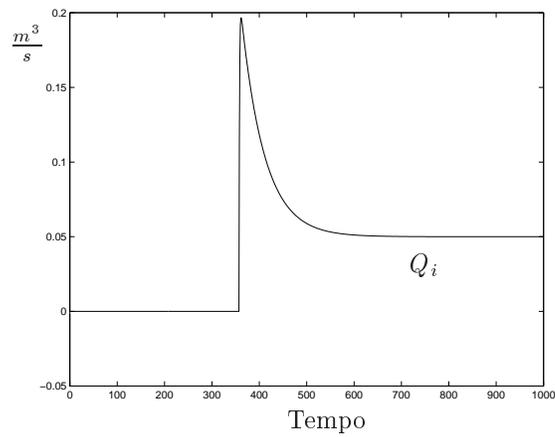


Figura 8.13: Portata in ingresso al serbatoio con regolatore PI.

```
>> I
I =
    2.0503
>> D
D =
    0.3413
>>
```

Il modello *Simulink* per l'identificazione della funzione di trasferimento  $G(s)$  con la  $G_a(s)$  è riportato

in Figura 8.14

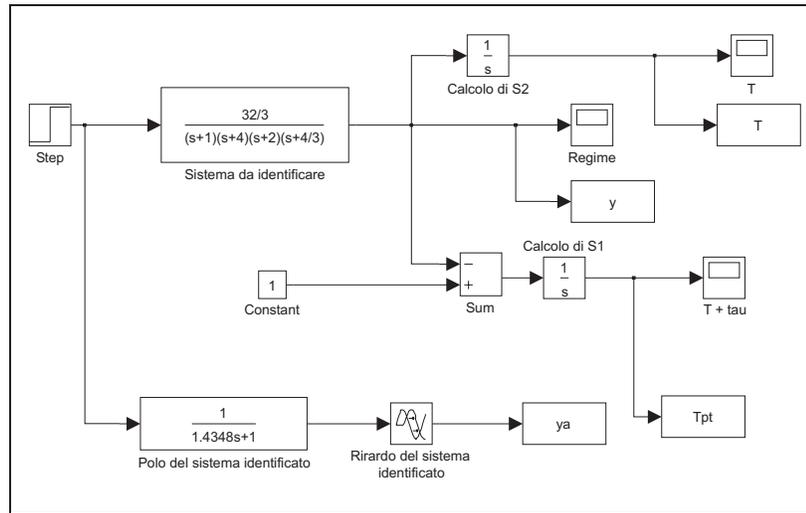


Figura 8.14: Modello *Simulink* per l'identificazione di  $G(s)$ .

mentre il confronto tra la risposta del sistema reale e quella del sistema approssimato è riportato in Figura 8.15.

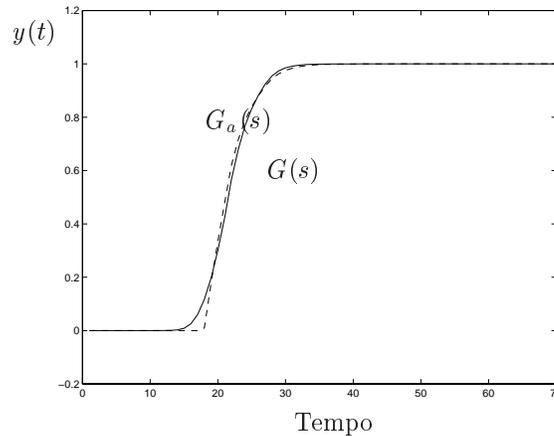


Figura 8.15: Confronto delle risposte al gradino di  $G(s)$  e  $G_a(s)$ .

In Figura 8.16 viene mostrata l'implementazione di un PID in ambiente *Simulink*, modificata introducendo il blocco di saturazione.

Si utilizza questa versione di PID, in cui il blocco di saturazione viene escluso mettendo rispettivamente come limiti superiore ed inferiore i valori di  $+\text{inf}$  e  $-\text{inf}$ . Con tali parametri il funzionamento del blocco in Figura 8.16 è equivalente a quello del PID semplice già presente nelle librerie di *Simulink*.

Il blocco *Subsystem* PID viene inserito nello schema di Figura 8.17.

Si confrontano quindi le risposte del sistema controllato senza regolatore e sistema in retroazione col PID. La Figura 8.18 riporta le risposte  $y(t)$  del sistema  $G(s)$  e  $y_c(t)$  del sistema compensato  $G_c(s)$ .

In Figura 8.18 sono stati anche evidenziati i livelli di  $10\% \div 90\%$  e  $\pm 5\%$  rispettivamente per la definizione del tempo di salita e il tempo di assestamento.

Come si può osservare dalla Figura 8.18, l'introduzione del PID peggiora le caratteristiche dina-

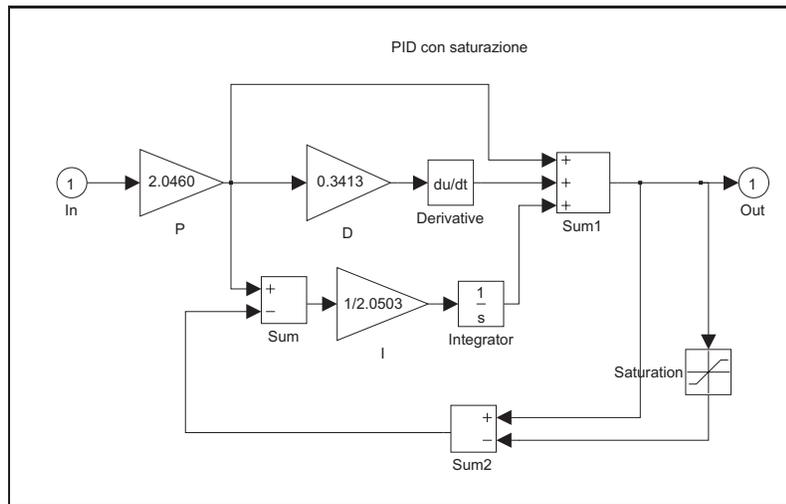


Figura 8.16: Subsystem PID con saturazione in ambiente *Simulink*.

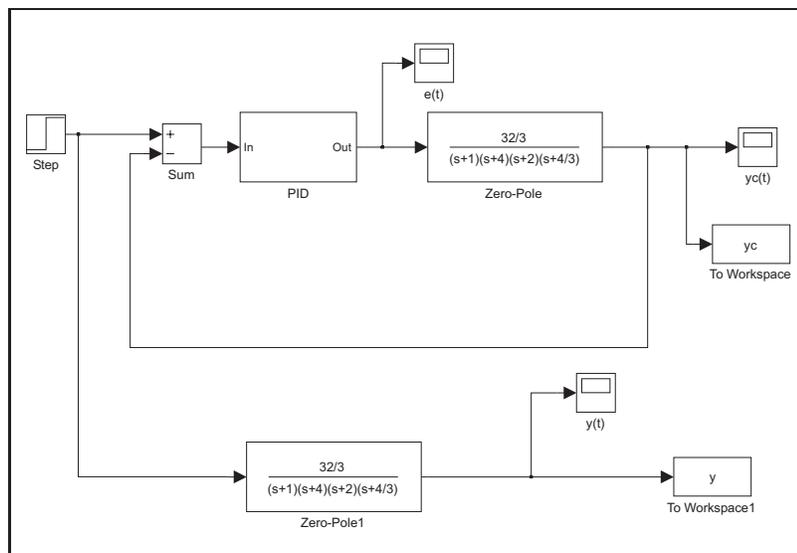


Figura 8.17: Il sistema controllato  $G(s)$  in retroazione con il PID.

miche della risposta, aumentando la sovralongazione, ma migliora la velocità della risposta stessa, diminuendo il tempo di salita e lasciando invariato il tempo di assestamento.

## 8.6 PID con schema anti-windup

Si consideri lo schema del serbatoio per il controllo di livello utilizzato nel Paragrafo 8.4 in retroazione con un PI classico con  $K_p = 10$  e  $T_i = 0.2$ . Imponendo un prelievo costante al serbatoio si ottengono i seguenti andamenti del livello del serbatoio  $h(t)$  e della portata di ingresso  $Q_i$ , riportati in Figura 8.19. Il livello di riferimento è fissato a 9 mentre il serbatoio parte da un livello iniziale pari a 10.

Successivamente, facendo riferimento ad un PID secondo uno schema riportato in Figura 8.20, con sistema di limitazione della derivata e anti-windup, inserito nel sistema serbatoio-regolatore di Figura 8.21, si ottengono i risultati riportati in Figura 8.22.

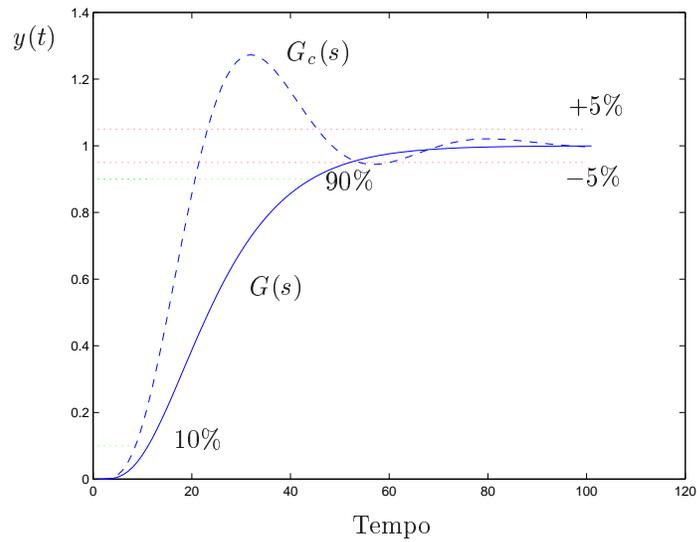


Figura 8.18: Risposte del sistema con e senza compensazione e livelli di riferimento.

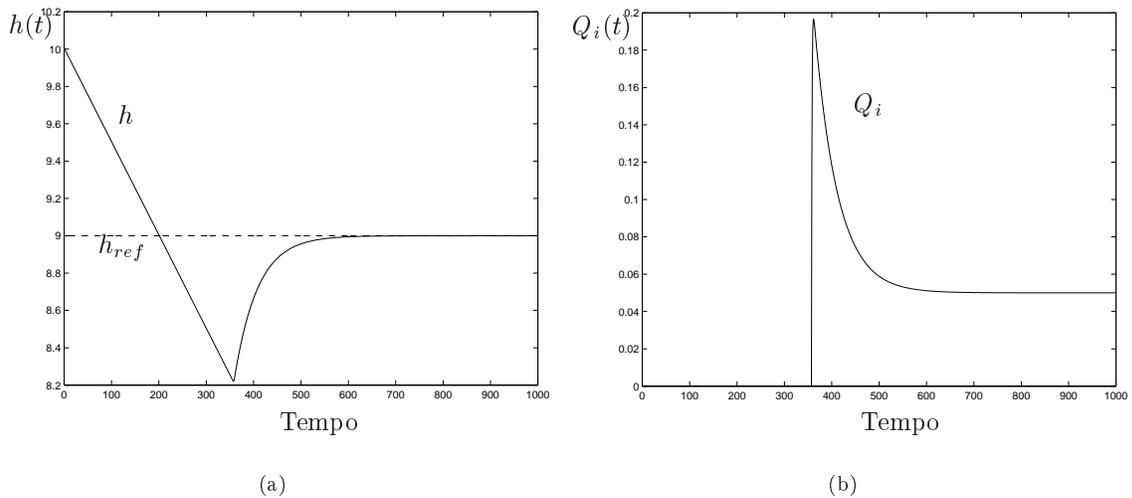


Figura 8.19: Livello del serbatoio con PID classico con livello di riferimento (a) e portata in ingresso  $Q_i$  (b).

Il PID utilizza i seguenti parametri:  $K_d = 10$ ,  $T_i = 0.2$ ,  $T_d = 0$ ,  $N = 5$ ,  $T_t = 3$  e come valori di saturazione  $[0, 0.2]$ .

La Figura 8.22 riporta il livello del serbatoio confrontato con quello di riferimento e l'andamento del flusso di liquido in ingresso.

Si può notare la risposta più veloce del sistema che utilizza un PID con struttura modificata rispetto a quella di un PID classico. Nel PID classico con saturazione dell'attuatore, infatti, a causa della saturazione del segnale di attuazione e della ridotta velocità della decrescita del segnale di errore, il termine integrale aumenta molto di più rispetto al caso privo di limitazione. Quando poi l'errore tende ad annullarsi, il segnale di controllo rimane alto a causa dell'elevato valore dell'integrale, causando quindi una elevata sovraelongazione e un tempo di assestamento più elevato.

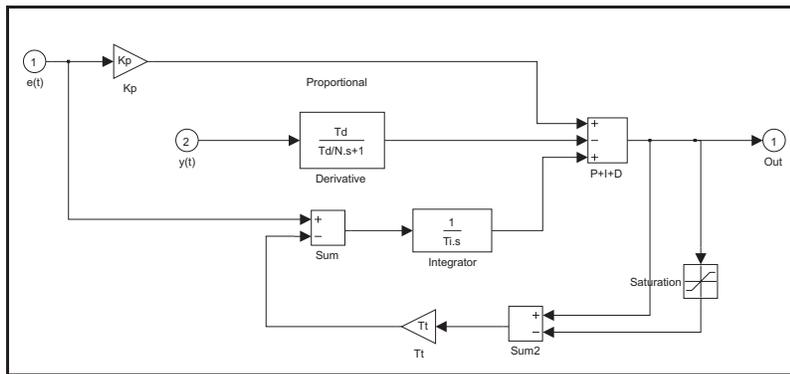


Figura 8.20: PID in *Simulink* a derivata limitata e anti-windup.

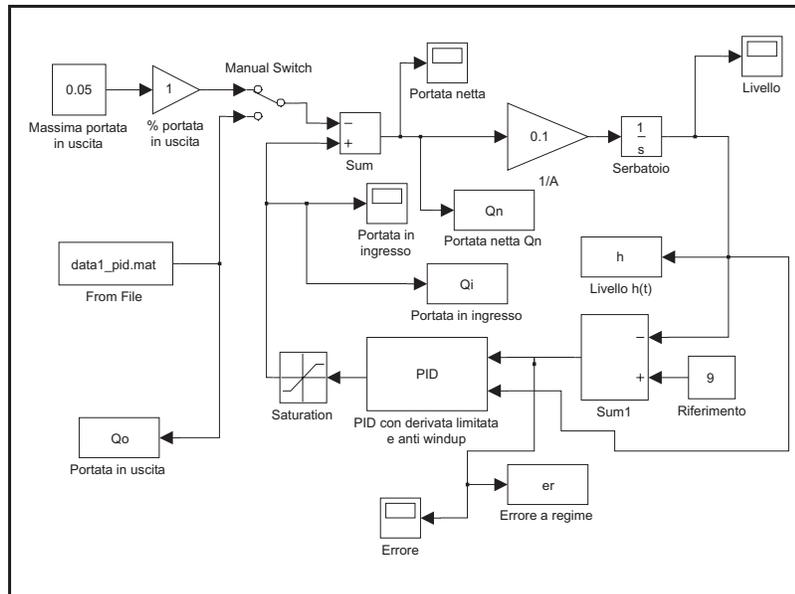


Figura 8.21: Schema *Simulink* di PID modificato e serbatoio.

## 8.7 Esercizi proposti in aula didattica.

1. Data la funzione di trasferimento

$$\frac{1}{(1+s)^3} \quad (8.8)$$

progettare un regolatore PID utilizzando le formule di Ziegler-Nichols (funzioni del valore del guadagno in retroazione  $K_o$  che porta il sistema al limite della stabilità e del periodo delle oscillazioni ottenute  $T_o$ ).

I parametri  $K_o$  e  $T_o$  possono essere ottenuti dal luogo delle radici del sistema chiuso in retroazione unitaria con un regolatore di tipo P secondo un guadagno proporzionale  $K_o$ . Con le formule di Ziegler-Nichols progettare quindi un PI, un PID ed un PID con limitazione della derivata ( $N=10$ ) e confrontare i risultati ottenuti con i diversi regolatori.

2. Riprendendo il sistema descritto dall'Equazione 8.8 realizzare un PID (con  $N=10$ ) con limitazione dell'azione derivativa (cioè che effettui la derivata solo dell'uscita) e si confronti la risposta con quella ottenuta con PID in forma reale realizzato precedentemente.

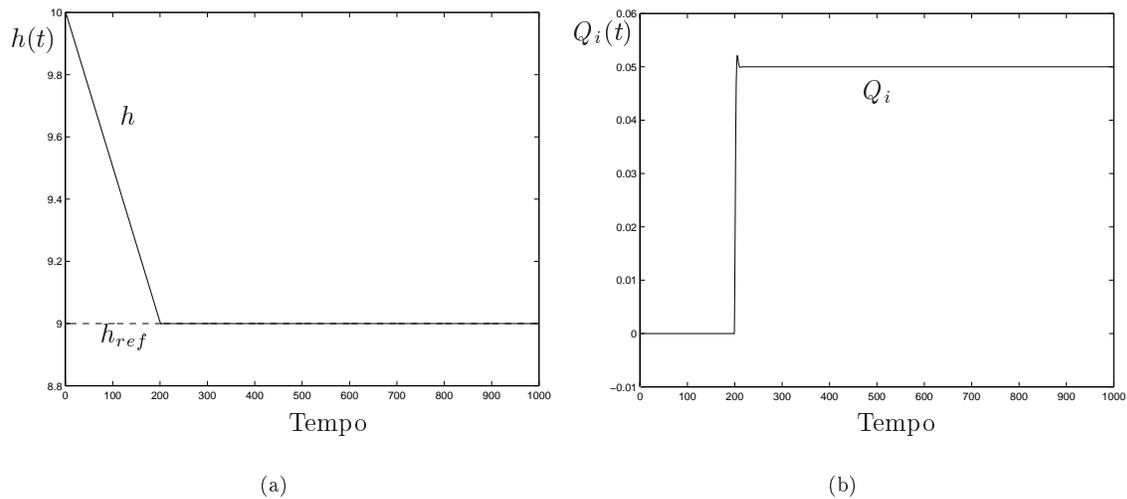


Figura 8.22: Livello del serbatoio  $h(t)$  con PID modificato con livello di riferimento (a) e portata in ingresso  $Q_i$  (b).

3. Riprendendo lo schema che utilizza il PID con derivata reale della sola uscita, si introduca un disturbo sull'uscita stessa (rumore bianco con varianza 0.01) e si calcoli l'andamento nel tempo del segnale di controllo per  $N = 10$  e  $N = 30$ . Fare prove con  $N$  diverso e giustificare teoricamente i risultati ottenuti.