Automatica I (Laboratorio)

Silvio Simani

Dipartimento di Ingegneria
Università di Ferrara
Tel. 0532 97 4844
Fax. 0532 97 4870

E-mail: ssimani@ing.unife.it

URL: http://www.ing.unife.it/simani

Automatica (Laboratorio)

Schema delle lezioni

1. Informazioni generali sul corso
2. Introduzione a *Matlab*®

⇛ Simulazione di Sistemi Dinamici

3. Introduzione a *Simulink*®
4. Elementi di Controllo Digitale

La funzione `P = ctrb(A,B)`: come da definizione

```
function P = ctrb(A,B)
%CTRB   Form the controllability matrix.
%
%   P = CTRB(A,B)  returns the controllability matrix
%   P = [B A*B A^2*B ...A^(n-1)*B].
%   See also  CTRBF.

n = size(A,1);
P = B;
for i=1:n-1,
   P = [P (A^i)*B];
end

return
% end ctrb
```

La funzione P = ctrb(A,B): ottimizzata

```
function P = ctrb(A,B)
%CTRB   Form the controllability matrix.
%
%   P = CTRB(A,B)  returns the controllability matrix
%   P = [B A*B A^2 * B ... A^(n-1) * B].
%   See also  CTRBF.

n = size(A,1);
P = B;
for i=1:n-1,
   P = [B A*P];
end
return
% end ctrb
```

Simulazione di Sistemi Dinamici

- **Analisi di Sistemi Lineari**

  $\Rightarrow$ Possibile la risoluzione analitica delle equazioni

- **Analisi di sistemi non lineari**

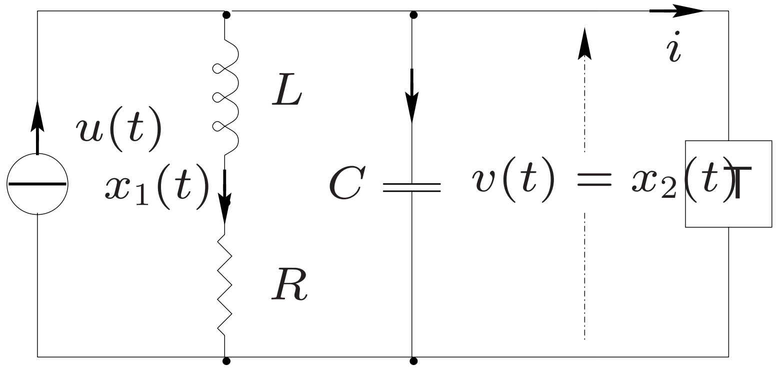
  $\Rightarrow$ Possibile la risoluzione numerica delle equazioni

  $\Rightarrow$ Analogie e Differenze

- **Analisi di un circuito non lineare**
- **Metodi numerici per l'integrazione**
- **Istruzioni di grafica in Matlab**

Analisi di un circuito non lineare

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -\tfrac{R}{L}\, x_1(t) + \tfrac{1}{L}\, x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= -\tfrac{1}{C}\, x_1(t) + \\
&\quad +\tfrac{1}{C}\big(G_1 x_2(t) - G_2 x_2^3(t)\big) + \tfrac{1}{C} u(t)
\end{aligned}
$$



ove

$$i = -G_1 * v + G_2 * v^3$$

con i seguenti valori

$$G_1 = 0.8\ ,\ G_2 = 0.05\ ,\ R = 2\ ,\ L = 1 \text{ e } C = 1.$$

Simulazione del circuito non lineare

La funzione `tunnel1.m`

```
function xd = tunnel1(t,x,flag,param)
% Funzione che implementa il circuito
%  non lineare.
%
% d x1(t) / dt = - R/L x1(t) + 1/L x2(t)
% d x2(t) / dt = - 1/C x1(t) + 1/C ( G1 x2(t)
%                - G2 x2(t)^3 ) + 1/C u(t)
%

R = param(1);
L = param(2);
C = param(3) ;
G1 = param(4);
G2 = param(5);

x1d = - (R/L) * x(1) + (1.0/L) * x(2);
x2d = - (1.0/C) * x(1) + (1.0/C)*( G1 * x(2)
                              - G2 * x(2)^3 );

xd = [x1d; x2d];

return
```

Integrazione di Equazioni Differenziali

La funzione `ode45.m`**...**

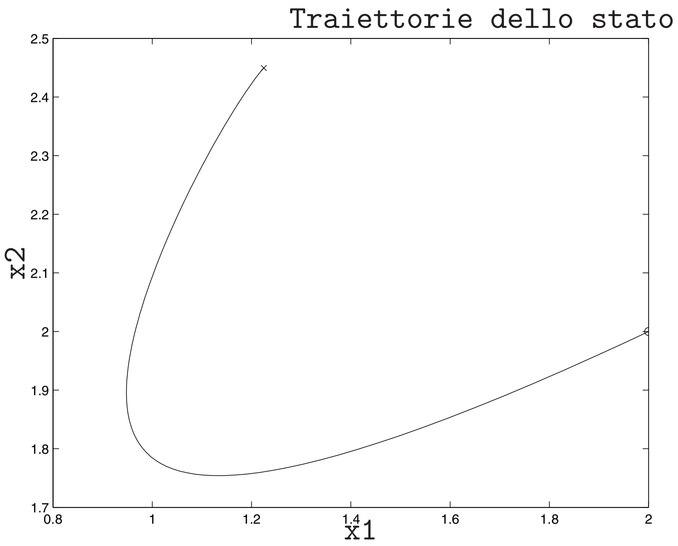
```
% Script-file che integra il sistema differenziale
% non lineare del diodo tunnel e grafica i risultati.

options = odeset('RelTol',1e-6); % Opzioni per
                                 % la funzione
                                 % di integrazione

% Parametri fisici del modello
R = 2; L = 1; C = 1; G1 = 0.8; G2 = 0.05;

param = [R,L,C,G1,G2]; % Parametri fisici del modello

ci = [2 2]; % Condizioni iniziali per l'integrazione

time = [0 40]; % Tempo di integrazione

[t,x] = ode45('tunnel1',time,ci,options,param);

             % Funzione che effettua l'integrazione
```

Integrazione di Equazioni Differenziali

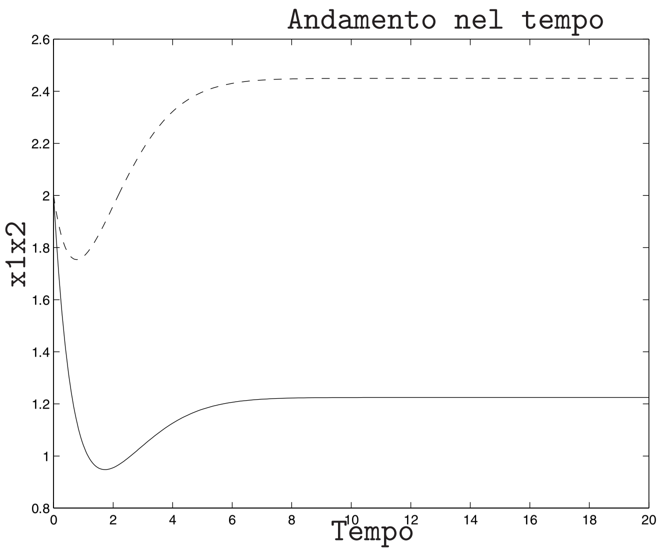
La funzione `ode45.m` (... continua)

```
%% Grafico delle traiettorie dello stato

figure

plot(x(:,1),x(:,2),'-') % Disegna i vettori passati
                        % come argomenti

title('Traiettorie dello stato') % Titolo del grafico
xlabel('x1') % Etichetta dell'asse delle ascisse
ylabel('x2') % Etichetta dell'asse delle ordinate

%% Grafico del moto dello stato

figure

plot(t,x(:,1),'-',t,x(:,2),'--')

title('Andamento nel tempo')
xlabel('Tempo')
ylabel('x1(t) e x2(t)')
```

Grafici dei Risultati: `tunnel1.m`



Traiettorie dello stato.



Andamento nel tempo delle variabili di stato.

Elementi di Matlab: *Ode Suite*

- **File Ode e Ode Suite Solvers**

  ⇒ Un *Ode file* è un file di tipo `.m` per definire un problema di equazioni differenziali che sono risolte dalle *Ode Suite Solvers*

- `Y = odefile(T,Y0,FLAG,P1,P2,...)`

  ⇒ `T` e `Y0` sono variabili di integrazione

  ⇒ `FLAG` è una stringa che indica il tipo di informazione restituita dall' Ode file. `P1,P2,...` sono parametri addizionali richiesti.

Elementi di Matlab: *Ode Suite*

- **File Ode e Ode Suite Solvers**
- **Ode Suite Solvers: risolutori di equazioni differenziali (sono funzionali)**
- `[T,Y] = ode45('odefile',TSPAN,YCI,options,P1,P2,...)`

  ⇒ ODE23, ODE113, ODE15S, ODE23S, ODE23T, ODE23TB

  ⇒ `options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-4,'Maxstep',1e-5);`

  ⇒ `[TSPAN,YCI,options] = odefile([],[],'init')`

Elementi di Matlab: *Ode Suite*

Integrazione *numerica* di equazioni differenziali ordinarie

⇒ `options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-4,'MaxStep',10);`

⇒ `RelTol`, `AbsTol` : tolleranze relativa ed assoluta sull'errore ε per il controllo della convergenza

$$|\varepsilon| \leq \texttt{RelTol}|y| + \texttt{AbsTol}$$

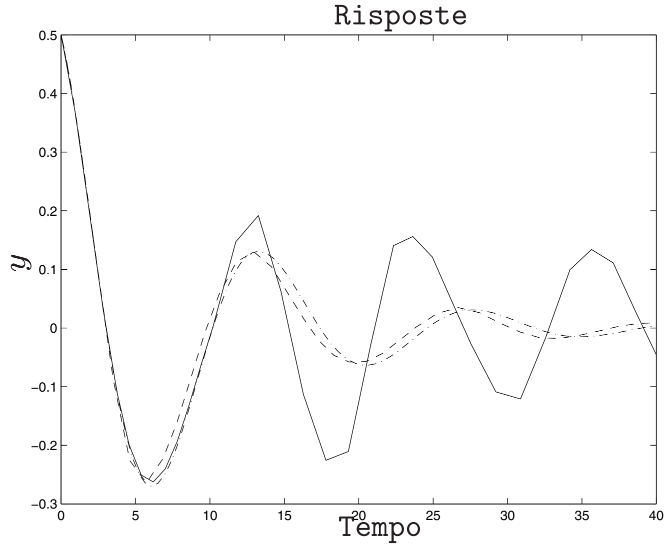
Errore ε, soluzione y

⇒ `maxStep`: limite superiore al passo di integrazione

Integrazione di Equazioni Differenziali: Problemi

⇒ Esempio del circuito `tunnel1.m` e `ode45`: tolleranze e passi di integrazione diversi.

- `'-'`: `RelTol = Abstol = 10e-1`
- `'--'`: `RelTol = Abstol = 10e-2`
- `'-.'`: `RelTol = Abstol = 10e-6`



Risposta del sistema con diversi passi di integrazione.

Simulazione del circuito non lineare

La funzione `tunnel2.m`

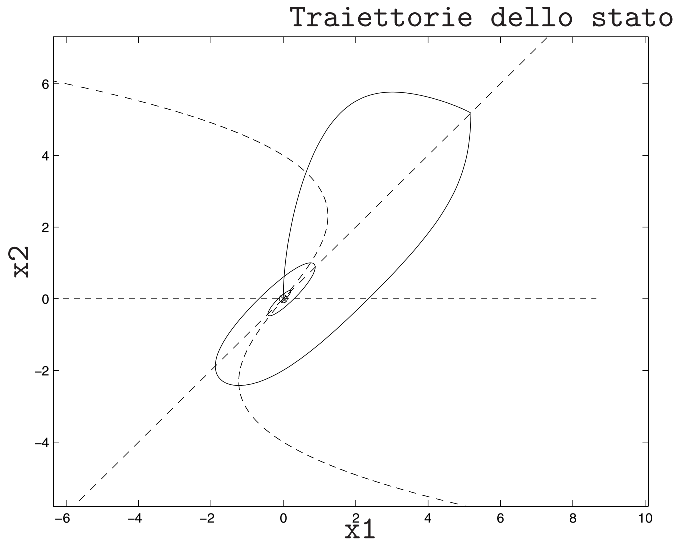
```
function xd = tunnel2(t,x,flag,param)
% Funzione che implementa il circuito di Eq.
% (2.1). E' presente anche una funzione del=
% =l'ingresso udt funzione del tempo.
%
% d x1(t) / dt = - R/L x1(t) + 1/L x2(t)
% d x2(t) / dt = - 1/C x1(t) + 1/C ( G1 x2(t)
%                 - G2 x2(t)^3 ) + 1/C u(t)
%

R = param(1); % Parametri del circuito non
L = param(2); % lineare
C = param(3);
G1 = param(4);
G2 = param(5);
Tstart = param(6); % Istante di inizio del gradino
Tstop = param(7); % Istante finale del gradino
Value = param(8); % Ampiezza del gradino
```

Simulazione del circuito non lineare

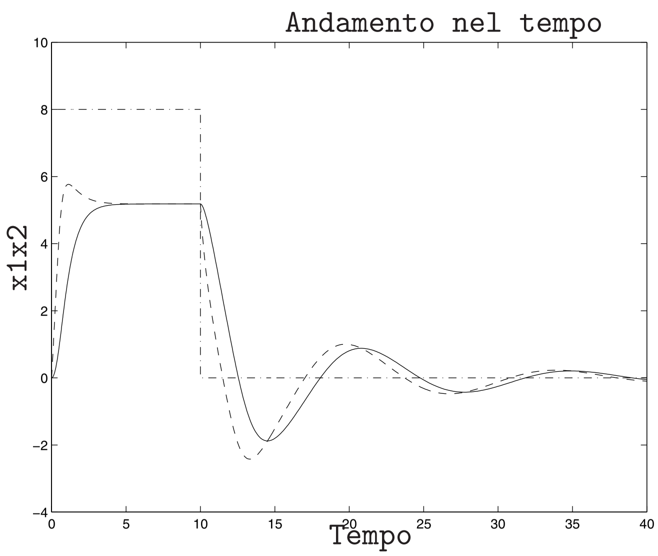
La funzione `tunnel2.m` (continua)

```
if((t>=Tstart)&(t<Tstop)),udt=Value; % Definizione
 else udt=0.0;                       % del gradino
end;

x1d = - (R/L) * x(1) + (1.0/L) * x(2);
x2d = - (1.0/C) * x(1) + (1.0/C)*( G1 * x(2) -
                                 G2 * x(2)^3 );

xd = [x1d; x2d + (1.0/C)*udt];

return
```

Grafici dei Risultati: `tunnel2.m`



Traiettorie dello stato e punto di equilibrio.



Andamento nel tempo delle variabili di stato.

Elementi Grafici di Matlab

- **Funzioni di grafica** `plot(X,Y,S)`
  - ⇒ Grafica il vettore `Y` in funzione di `X`
  - ⇒ `X` e `Y` sono vettori con le stesso numero di elementi
  - ⇒ S è una stringa formata da 3 caratteri:

y	yellow	.	point	-	solid
m	magenta	o	circle	:	dotted
c	cyan	x	x-mark	-.	dashdot
r	red	+	plus	--	dashed
g	green	*	star		
b	blue	s	square		
w	white	d	diamond		
k	black	v	triangle (down)		

Elementi Grafici di Matlab

```
figure

plot(x(:,1),x(:,2),'-')
title('Traiettorie dello stato')
xlabel('x1'), ylabel('x2')
```

- **Apertura finestra grafica:** `figure` $\longrightarrow$ `figure(n)`
- **Visualizzazione grafici:** `plot()`
- **Titolo grafico:** `title()`
- **Etichette assi:** `xlabel(), ylabel()`

Linearizzazione di un sistema dinamico non lineare

⇒ Modello non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = & f_1(x(t), u(t)) \\ \dot{x}_2(t) & = & f_2(x(t), u(t)) \\ y(t) & = & g(t) \end{cases}$$

⇒ Modello linearizzato

$$\begin{cases} \delta\dot{x}(t) & = & A\delta x(t) + B\delta u(t) \\ \\ \delta y(t) & = & C\delta x(t) \end{cases}$$

⇒ $\delta x(t)$, $\delta u(t)$ e $\delta y(t)$ gli scostamenti dai valori di equilibrio

Linearizzazione di un sistema dinamico non lineare

⇒ Modello linearizzato

$$\begin{cases} \delta\dot{x}(t) & = & A\delta x(t) + B\delta u(t) \\ \delta y(t) & = & C\delta x(t) \end{cases}$$

⇒ Matrici calcolate nel punto di equilibrio

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\ f_1}{\partial\ x_1} & \frac{\partial\ f_1}{\partial\ x_2} \\ \frac{\partial\ f_2}{\partial\ x_1} & \frac{\partial\ f_2}{\partial\ x_2} \end{bmatrix},\ \mathrm{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\ f_1}{\partial\ u} \\ \frac{\partial\ f_2}{\partial\ u} \end{bmatrix}\ \mathrm{e}\ \mathrm{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\ g}{\partial\ x_1} & \frac{\partial\ g}{\partial\ x_2} \end{bmatrix},$$

⇒ Linearizzazione del modello del circuito non lineare (`tunnel1.m`)

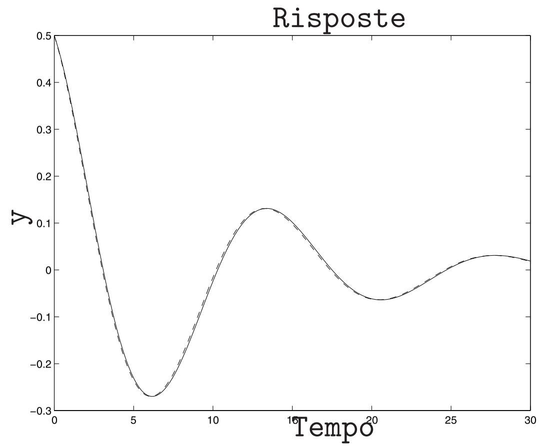
Linearizzazione del modello del circuito

```
%% Modello non lineare
options = odeset('RelTol',1e-6);

R = 1; % Parametri del circuito non lineare.
L = 1;
C = 1;
G1 = 0.8;
G2 = 0.05;

param = [R,L,C,G1,G2]; % Parametri del
                 % circuito non lineare.
ci = [0.5 0.5]; % Condizioni iniziali
ti = 0;
tf = 40;
time = [ti tf]; % Istante iniziale e
                % finale di integrazione

[t,x] = ode45('tunnel1',time,ci,options,param);
                     % Integrazione del sistema
y = x(:,2); % Uscita del sistema
```

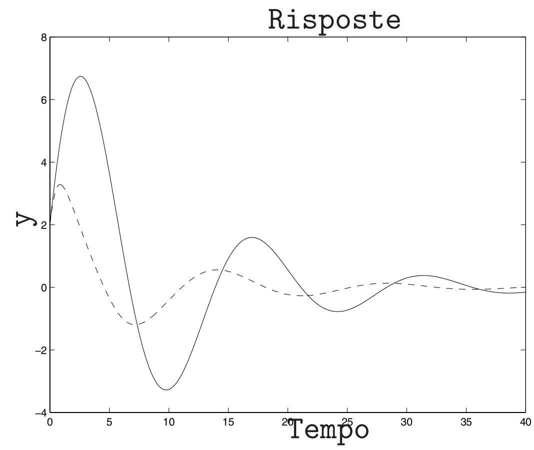
Linearizzazione del modello del circuito

```
%% Modello lineare nello spazio degli stati

A = [-R/L   1.0/L;
     -1.0/C G1/C ];
B = [1.0/C 0]';
C = [0 1];
D = 0;

Sys = ss(A,B,C,D); % Crea il modello nello spazio
                   % degli stati
tl = ti:0.01:tf;
Ul = zeros(size(tl));
[yl,tl,xl] = lsim(Sys,Ul,tl,ci);

figure, plot(tl,yl,'-',t,y,'--')
title('Risposte'), xlabel('Tempo'), ylabel('y')

figure, plot(x(:,1),x(:,2),'-'), hold on
plot(xl(:,1),xl(:,2),':'), hold on
title('Traiettorie dello stato'), xlabel('x1')
ylabel('x2')
```

Linearizzazione del circuito: proprietà



Risposta del sistema lineare e del sistema non lineare.



Risposta dei sistemi per una condizione iniziale distante dall'origine.

Simulazione di sistemi dinamici

La funzione `[Y,T,X] = lsim(SYS,U,T,X0)`

⇒ Simula la risposta nel tempo di un sistema LTI per ingressi arbitrari `U`

⇒ `SYS = ss(A,B,C,D)`

⇒ `U` vettore degli ingressi, `T` istanti di simulazione

⇒ `X0` condizioni iniziali della simulazione

⇒ `Y`, uscite del sistema: `length(T)` righe e `m` colonne

⇒ `X`: `length(T)` righe, `n` colonne

Esercizi Proposti (1)

Modello matematico di Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = & a_1(1 - x_1(t)/k)x_1(t) - a_2 x_1(t)x_2(t) + u(t) & \qquad \textit{Prede} \\ \\ \dot{x}_2(t) & = & -a_3 x_2(t) + a_4 x_1(t)x_2(t) & \qquad \textit{Predatori} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $x_1(t)$ e $x_2(t)$ numero di prede di predatori

$\Rightarrow$ $u(t)$ cibo per le prede

$\Rightarrow$ k, numero massimo di prede in assenza di predatori e di cibo $(u(t) = 0)$

Esercizi Proposti (1)

Modello matematico di Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_1(1 - x_1(t)/k)x_1(t) - a_2x_1(t)x_2(t) + u(t) & \textit{Prede} \\ \dot{x}_2(t) = -a_3x_2(t) + a_4x_1(t)x_2(t) & \textit{Predatori} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ a_3 (> 0), tasso di crescita del predatore

$\Rightarrow$ a_1 (> 0), tasso di crescita delle prede

$\Rightarrow$ $-a_2x_1(t)x_2(t)$, decremento delle prede per la presenza dei predatori

$\Rightarrow$ $a_4x_1(t)x_2(t)$, incremento dei predatori per la presenza delle prede

Esercizi Proposti (1)

Modello matematico di Lotka-Volterra

$\Rightarrow$ Se $a_1 = 20$, $a_2 = 1$, $a_3 = 7$, $a_4 = 0.5$ e $k = 30$, si determinino:

1) l'andamento nel tempo del numero di prede e predatori, supponendo nullo l'ingresso u(t) e nelle ipotesi di partire da un ecositema contenente 10 prede e 10 predatori. Si calcoli anche la traiettoria percorsa dal sistema nello spazio degli stati.
2) gli stati di equilibrio del sistema in assenza di ingresso.
3) i valori di regime raggiunti dal numero di prede e predatori nelle ipotesi che $u(t)$ sia un gradino di ampiezza $u(t) = 20$ e a partire dalle stesse condizioni proposte al punto 1). Si determini per tentativi l'ampiezza del gradino che consente di mantenere a regime un numero di predatori pari a 15.

Esercizi Proposti (2a)

Sistema ibrido

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{cases} \mathrm{A}_1\mathbf{x}(t) & \text{se } x_1(t) * x_2(t) < 0 \\ \mathrm{A}_2\mathbf{x}(t) & \text{se } x_1(t) * x_2(t) \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, durata della simulazione 10s

$\Rightarrow$ Condizioni iniziali $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(10^{-6}, 10^{-6})$

Esercizi Proposti (2b)

- **Date le matrici:**

$$\Rightarrow \quad \mathrm{A}_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 1.0 \\ -10.0 & -0.1 \end{bmatrix}, \mathrm{A}_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & 10 \\ -1.0 & -0.1 \end{bmatrix}$$

- **Disegnare le traiettorie dello stato per i singoli sistemi e per quello ibrido, per le diverse condizioni iniziali**

- **Disegnare l'andamento dello stato nel tempo per i singoli sistemi e per quello ibrido, per le diverse condizioni iniziali**