



Automatica (Laboratorio)

Silvio Simani

Dipartimento di Ingegneria
Università di Ferrara

Tel. 0532 293844
Fax. 0532 768602

E-mail: ssimani@ing.unife.it

URL: <http://www.ing.unife.it/simani>

URL: <http://www.ing.unife.it/simani/lessons.html>



Sistemi dinamici a tempo continuo: problemi

⇒ Assegnabilità degli autovalori

⇒ Retroazione algebrica dell'uscita

⇒ Progetto di un osservatore identità

⇒ Retroazione stato stimato-ingresso



Sistemi del secondo ordine

⇒ Massima sovravelongazione S , tempo di assestamento T_a ed errore a regime



Progetto in ambiente Matlab





Retroazione dello stato ed assegnabilità autovalori

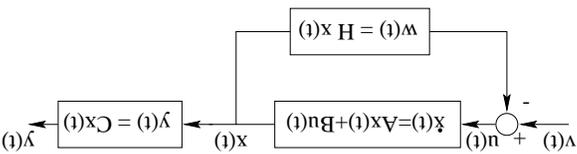
$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \right.$$

⇒ Retroazione algebrica dello stato:

$$u(t) = -Hx(t) + v(t)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A - BH)x(t) + Bv(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \right.$$

⇒ Gli autovalori di $(A - BH)$ sono posizionabili arbitrariamente con $H_{r \times n}$ sse (A, B, C) è completamente raggiungibile e controllabile.



Retroazione algebrica dell'uscita

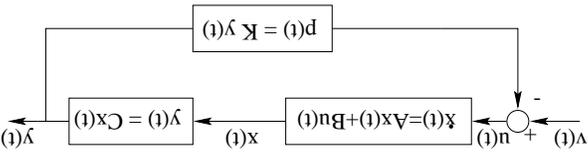
$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \right.$$

⇒ Retroazione algebrica dell'uscita:

$$u(t) = -Ky(t) + v(t)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A - BKC)x(t) + Bv(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \right.$$

⇒ La retroazione algebrica dell'uscita modifica gli autovalori della parte di (A, B, C) completamente raggiungibile-controllabile e osservabile-ricostruibile.



Assegnamento autovalori in Matlab

Assegnamento automatico degli autovalori

⇒ Funzione `Matlab place`, (in *Control System Toolbox*)

$$\gg H = \text{place}(A, B, P)$$

⇒ Calcola H in modo che $P = \text{eig}(A - B H)$

⇒ Autovalori non devono avere molteplicità maggiore del numero degli ingressi

$$[H, \text{PREC}, \text{MESSAGE}] = \text{place}(A, B, P)$$

⇒ `PREC` accuratezza dell'assegnamento, `MESSAGE` contiene un messaggio di *warning*, H matrice di retroazione



Luogo delle radici in Matlab

`rlocus(SYS)`, (in *Control System Toolbox*)

⇒ Calcola e grafica il luogo delle radici di $H(s) = D(s) + KN(s) = 0$

⇒ se $\text{SYS} = \text{ss}(A, B, C, D)$ oppure $\text{SYS} = \text{tf}(N, D)$

⇒ con $N(s), D(s) \in (A, B, C, D)$ tali che $\frac{D(s)}{N(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$

⇒ $[R, K] = \text{rlocus}(\text{SYS})$ oppure $R = \text{rlocus}(\text{SYS}, K)$, R fornisce le posizioni nel piano complesso degli autovalori di SYS ottenute specificando il valore del guadagno K

⇒ R : per righe le posizioni degli autovalori e tante colonne quanti gli elementi di K



Lugogo delle radici in Matlab

\rightarrow `rlocfind(SYS), (in Control System Toolbox)`

\rightarrow `[K, POLES] = rlocfind(SYS)`

\Rightarrow Determina graficamente il guadagno K del luogo delle radici per un insieme di autovalori POLES di SYS, selezionati col mouse

\rightarrow `[K, POLES] = rlocfind(SYS, P)`

\Rightarrow Il vettore P contiene le radici del luogo e calcola il guadagno K corrispondente

\Rightarrow L'elemento j -esimo di K corrisponde alla posizione $P(j)$ e la j -esima colonna della matrice POLES contiene i poli risultanti



Osservatore identità

\rightarrow **Dato il sistema:**

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

\rightarrow **si può progettare l'osservatore identità:**

$$\Rightarrow \dot{\hat{x}}(t) = (A - KC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ky(t)$$

$$\hat{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - K(C\hat{x}(t) - y(t))$$

\rightarrow

Se $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$,
l'errore vale $e(t) = e^{(A-KC)t}e(0)$

\rightarrow

L'osservatore ha dinamica arbitraria se il sistema è completamente osservabile e ricostruibile





Assegnamento autovalori in Matlab per l'osservatore

Assegnamento automatico degli autovalori

⇒ Funzione *Matlab* place

⇒ $K = \text{place}(A', C', P); (H = \text{place}(A, B, P))$

⇒ $A - KC = (A' - C'K')^T$

⇒ Calcola K in modo che $P = \text{eig}(A - KC)$

⇒ Autovalori non devono avere molteplicità maggiore del numero delle uscite



Retroazione stato stimato-ingresso

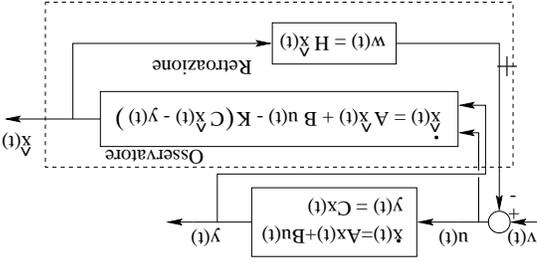
⇒ $\dot{\hat{x}}(t) = Ax(t) - BH\hat{x}(t) + Bv(t)$

⇒ $\dot{x}(t) = (A - BH)x(t) - BH e(t) + Bv(t)$

⇒ Vettore di stato: $\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$

⇒ $\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BH & 0 \\ -BH & A - KC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$

⇒ Principio di separazione degli autovalori



Parametri caratteristici di sistemi del secondo ordine

⇒ **Dato il sistema del secondo ordine** $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$

⇒ Se $0 < \delta < 1$, ω_n è la pulsazione naturale
 δ coefficiente di smorzamento

⇒ **Nel piano complesso** (σ, ω) , con $\sigma + w_i = s$

⇒ $\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}$ è la parte immaginaria dei poli complessi coniugati
 $-\delta\omega_n$ la parte reale

⇒ **La risposta** $y(t)$ **al gradino unitario è oscillatoria e viene caratterizzata da** **parametri caratteristici**

⇒ S , **massima sovralongazione**
 T_a , **tempo di assestamento**



Parametri caratteristici di sistemi del secondo ordine

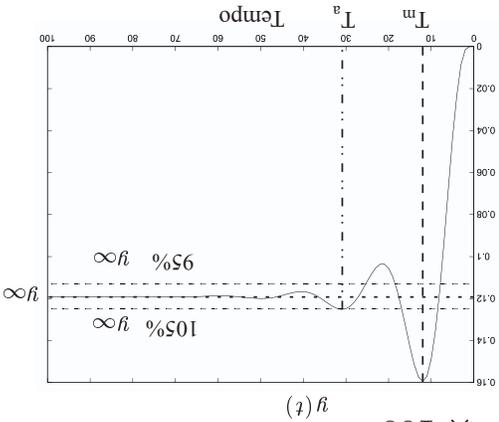
⇒ **Massima sovralongazione**, $S = \frac{y(T_m) - y_\infty}{y_\infty} \times 100$

⇒ T_m istante di massima sovralongazione
 $y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$

⇒ **Tempo di assestamento**, t
 $|y(t) - y_\infty| \leq 0.05y_\infty$, con $t \geq T_a$

⇒ **Per i sistemi del secondo ordine:**
 $T_a \approx \frac{3}{\delta\omega_n}$

⇒ $S = 100e^{-\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\pi\delta}}$





Errore a regime

↳ Sistema $G(s)$ chiuso in retroazione unitaria

⇒ se $e(s) = n(s) - y(s)$

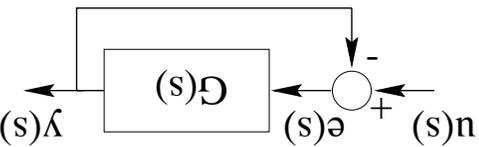
⇒ allora $e(s) = \frac{1}{1+G(s)}n(s)$

⇒ Teorema del Valore Finale

↳ **Errore a regime** $e_r = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s)$

⇒ e_r definito se $n(s)$ coincide con segnali di test

⇒ Gradino, rampa, parabola



Esercizi svolto proposto (1)

In riferimento al sistema dinamico dalle matrici (A, B, C, D)

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 0 \\ -26 & 0 & 1 \\ -24 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0 \ 0 \ 1] \text{ e } D = 0$$

1 si determinino gli autovalori del sistema assegnato e si progetti per tentativi (graficando l'andamento nel tempo dell'uscita) una retroazione uscita-ingresso, tale che il sistema retroazionato abbia una risposta al gradino (di ampiezza 10) caratterizzata da un tempo di assestamento pari a 3s, ed un errore a regime $(v(t) - Ky(t))$ non superiore al 30% del valore dell'ampiezza del gradino. Calcolare successivamente gli autovalori dello stesso sistema chiuso in retroazione.



Esercizi svolto proposto (1)

2 Progettare per tentativi un osservatore identità per il sistema di partenza con autovalori reali e inferiori a -4 in modo da assicurare che l'errore di stima $e(t)$ scenda sotto al 2.5% in un tempo non superiore ad 1 secondo. Inoltre, i valori assoluti dei guadagni della matrice di retroazione dell'osservatore non devono risultare maggiori di 6. Si supponga che lo stato iniziale del sistema valga $[12, 20, -30]$ e che l'osservatore parta dallo stato zero.

3 Per il sistema iniziale si progetti una retroazione dello stato stimato dall'osservatore calcolato al passo precedente in modo che vengano assegnati al sistema gli stessi autovalori che ha l'osservatore. Si grafichi l'andamento dell'uscita del sistema globale eccitato da un gradino di ampiezza unitaria.



Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} -13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -46 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -48 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

per il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Esercizi proposti (2)

1. effettuare una realizzazione del sistema in ambiente *Simulink* e calcolarne gli autovalori;
2. determinare in ambiente *Matlab* il valore della matrice di retroazione K_s per una retroazione uscita-ingresso che assegni ad un autovalore il valore -9 . Successivamente realizzare lo schema *Simulink* per il sistema in retroazione eccitato da un gradino di ampiezza 10 ; graficare la risposta al gradino $y(t)$ e l'errore $e(t)$. Calcolare graficamente il tempo di assestamento e la massima sovralongazione.
3. Dato in ingresso un gradino di ampiezza 10 , determinare una matrice di retroazione uscita-ingresso K_r affinché il tempo di assestamento sia $T_a = 3s$. In tali condizioni, in seguito determinare graficamente la massima sovralongazione.
4. Determinare per il sistema di partenza il guadagno K_o di un osservatore dello stato che assegni gli autovalori $[-3, -3.5, -4]$. Si grafichi l'errore di stima nelle ipotesi che lo stato iniziale del sistema parta da $[12, -20, -30]$.

