

lezione 1

Sistemi di Controllo Digitale

Introduzione

Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1E, I-44123, Ferrara, Italia

Sistemi di Controllo Digitale

- **PROCESSO:**

Un insieme di operazioni o di trasformazioni che devono avvenire in sequenza opportuna in un impianto o in un sistema fisico

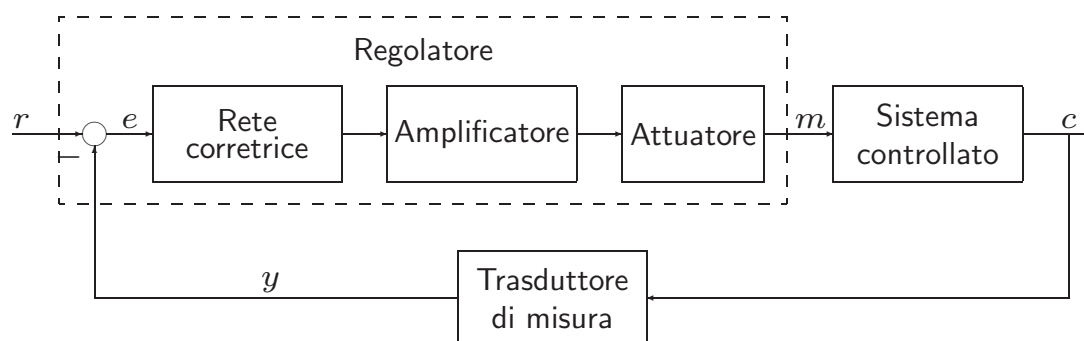
- **CONTROLLO DEI PROCESSI:**

Insieme di metodologie, tecniche e tecnologie orientate alla conduzione automatizzata di impianti industriali

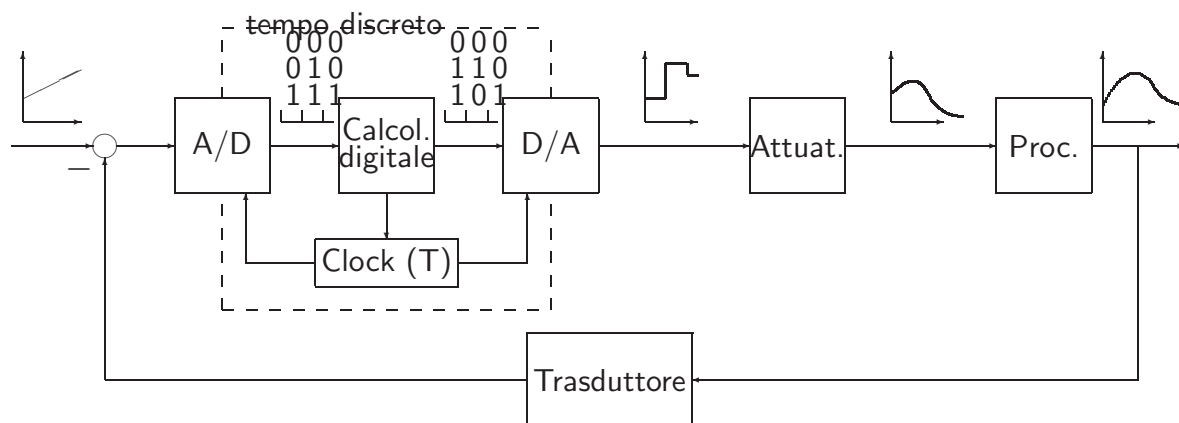
- **SISTEMI DI CONTROLLO DIGITALE:**

Sistemi di controllo in retroazione in cui è presente un calcolatore digitale e quindi una elaborazione a tempo discreto della legge di controllo

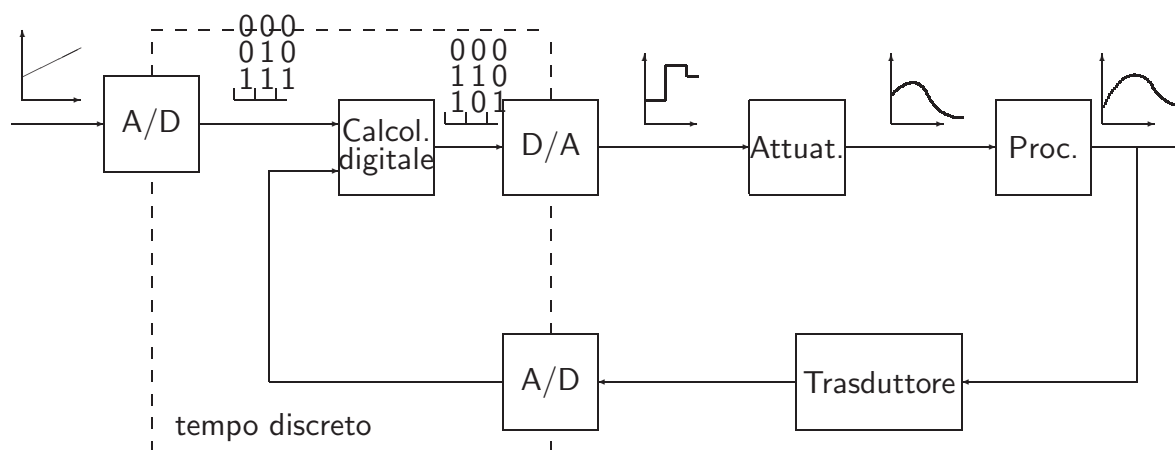
SCHEMA TIPICO DI UN SISTEMA DI CONTROLLO ANALOGICO



SCHEMI TIPICI DI UN SISTEMA DI CONTROLLO DIGITALE (1)



SCHEMI TIPICI DI UN SISTEMA DI CONTROLLO DIGITALE (2)



● CONTROLLO DIGITALE / CONTROLLO ANALOGICO :

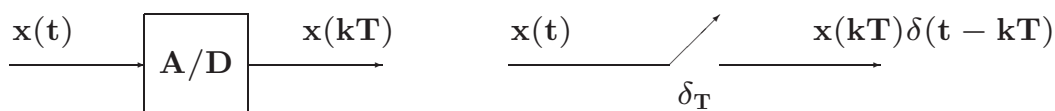
- + Maggiore capacità e precisione di elaborazione
- + Maggiore flessibilità
- + Maggiore affidabilità e ripetibilità
- + Maggiore trasmissibilità dei segnali
 - Progettazione più difficile e articolata
 - Stabilizzabilità più precaria
 - Possibilità di arresti non previsti
 - Necessità di utilizzare energia elettrica

DISPOSITIVI DI INTERFACCIA

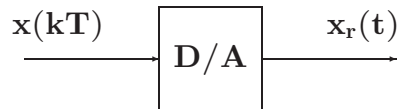
● A/D, convertitore Analogico/Digitale



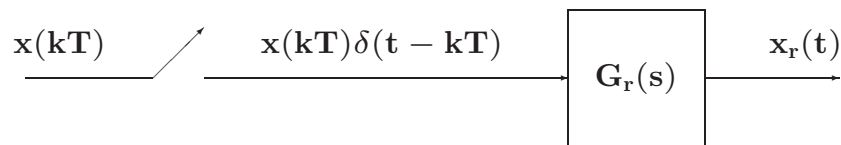
Con campionamento modellato ad impulsi di Dirac:



- **D/A, convertitore Digitale/Analogico**



Modello:



Caso dell'Hold:

$$G_r(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

ANELLO DI CONTROLLO DIGITALE

- Parte tempo continua: processo/impianto
- Parte tempo discreta: sistema di controllo
- Campionamento regolare di periodo T
- Trasformata Zeta

lezione 2**Modelli per Sistemi a Tempo Discreto**

Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1E, I-44123, Ferrara, Italia

Sistemi di Controllo Digitale

- **Equazione alle differenze:**

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{f}(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k; \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1})$$

Se $\mathbf{f}(\cdot)$ è lineare:

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{a}_1 \mathbf{u}_{k-1} - \dots - \mathbf{a}_n \mathbf{u}_{k-n} + \mathbf{b}_0 \mathbf{e}_k + \dots + \mathbf{b}_m \mathbf{e}_{k-m}$$

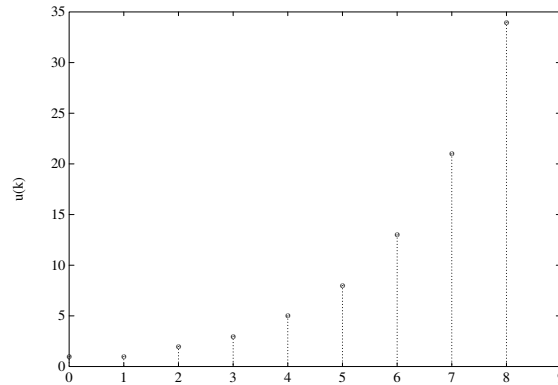
Esempio:

$$\mathbf{u}_k = -\mathbf{a}_1 \mathbf{u}_{k-1} - \mathbf{a}_2 \mathbf{u}_{k-2} + \mathbf{b}_0 \mathbf{e}_k$$

- Soluzione di equazioni alle differenze a coefficienti costanti

$$u_k = u_{k-1} + u_{k-2} \quad k \geq 2$$

$$u_0 = u_1 = 1.$$



- Soluzione elementare tipo z^k :

$$cz^k = cz^{k-1} + cz^{k-2}$$

$$z^2 - z - 1 = 0 \quad z_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$$

quindi in generale vale:

$$u_k = c_1 z_1^k + c_2 z_2^k$$

con c_1, c_2 determinate dalle condizioni iniziali per $k = 0, 1$. Infine si ha

$$u_k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k$$

Andamento divergente, dunque sistema instabile.

- Se **almeno una** delle radici della equazione caratteristica ha modulo maggiore di uno, la corrispondente equazione alle differenze è instabile, cioè la sua soluzione divergerà al crescere del tempo per condizione iniziale finita
- Se **tutte** le radici dell'equazione caratteristica sono **entro** in cerchio unitario, allora la corrispondente equazione alle differenze è **stabile**, cioè la sua soluzione convergerà a zero al crescere del tempo per ogni condizione iniziale finita

- Sia data una sequenza di valori $x_k \in \mathcal{R}$, definita per $k = 0, 1, 2, \dots$ e nulla per $k < 0$. La **$\mathcal{Z}$ -trasformata (unilatera) della sequenza** x_k è la funzione di variabile complessa z definita come

$$\begin{aligned} X(z) = \mathcal{Z}[x_k] &= x_0 + x_1 z^{-1} + \dots + x_k z^{-k} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \end{aligned}$$

Nel caso in cui la sequenza di valori x_k sia ottenuta campionando uniformemente con periodo T un segnale continuo descritto dalla funzione $x(t)$, $t \geq 0$, si avrà che $x_k = x(kT)$:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

- L'espressione estesa

$$\mathbf{X}(z) = x(0) + x(T) z^{-1} + x(2T) z^{-2} + \dots + x(kT) z^{-k} + \dots$$

implica la specificazione del **parametro periodo di campionamento T**, da cui dipendono i valori dei campioni della sequenza, cioè i coefficienti della serie.

- Si usa:

$$\mathbf{X}(z) = \mathcal{Z}[\mathbf{X}(s)]$$

intendendo:

$$\mathbf{X}(z) = \mathcal{Z}\left[\left\{\mathcal{L}^{-1}[\mathbf{X}(s)]\right|_{t=kT}\right\}]$$

- Nelle applicazioni ingegneristiche la funzione $\mathbf{X}(z)$ assume in generale una espressione **razionale fratta** del tipo

$$\mathbf{X}(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

che si può esprimere anche in potenze di z^{-1} :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(z) &= \frac{z^n (b_0 z^{-(n-m)} + b_1 z^{-(n-m+1)} + \dots + b_m z^{-n})}{z^n (1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n})} \\ &= \frac{b_0 z^{-(n-m)} + b_1 z^{-(n-m+1)} + \dots + b_m z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \end{aligned}$$

- **Esempio:**

$$\mathbf{X}(z) = \frac{z(z + 0.5)}{(z + 1)(z + 2)} = \frac{1 + 0.5 z^{-1}}{(1 + z^{-1})(1 + 2 z^{-1})}$$

- **Impulso discreto unitario**, detta anche funzione di Kronecker $\delta_0(t)$:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[x(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \\ &= 1 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + 0z^{-3} + \dots = 1 \end{aligned}$$

- **Gradino unitario**: Sia data la funzione gradino unitario

$$x(t) = h(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

La funzione $h(k)$ definita come

$$h(k) = \begin{cases} 1 & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

è detta **sequenza unitaria**. Si ha che

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathcal{Z}[h(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \\ &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \end{aligned}$$

La serie è convergente per $|z| > 1$.

- **Rampa unitaria.** Si consideri la funzione rampa unitaria:

$$x(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Poichè $x(kT) = kT$, $k = 0, 1, 2, \dots$, la $\mathcal{Z}$ -trasformata è

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[t] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = T \sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k} \\ &= T(z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots) \\ &= Tz^{-1}(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \dots) \\ &= T \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = T \frac{z}{(z - 1)^2} \end{aligned}$$

convergente per $|z| > 1$.

- **Funzione potenza a^k .** Sia data la funzione

$$x(k) = \begin{cases} a^k & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

con a costante reale o complessa. Dalla definizione di $\mathcal{Z}$ -trasformata si ha che

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[a^k] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} \\ &= 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + a^3 z^{-3} + \dots \\ &= \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \end{aligned}$$

Questa serie geometrica converge per $|z| > |a|$.

- **Funzione esponenziale.** Sia data la funzione

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

dove a è una costante reale o complessa. Poichè $x(kT) = e^{-akT}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, si ha

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[e^{-at}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} \\ &= 1 + e^{-aT} z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2} + e^{-3aT} z^{-3} + \dots \\ &= \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}} \end{aligned}$$

che converge per $|z| > e^{-\operatorname{Re}(a)T}$. Si noti che per $a = 0$ si ha il gradino unitario.

lezione 3

Trasformata $\mathcal{Z}$

- **Esempio:** $X(s) = \frac{1}{s(s+1)}$

- Calcolare $X(z) = \mathcal{Z}[X(s)]$

- Prima tecnica: $x(t) = 1 - e^{-t}$

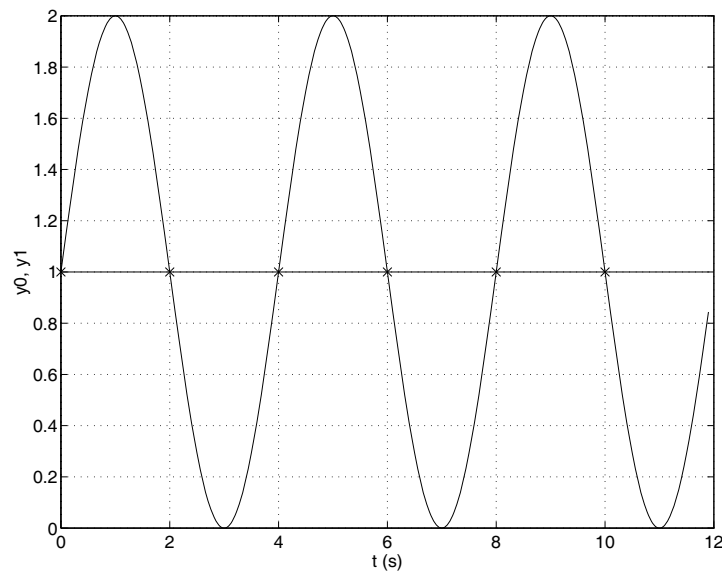
$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[1 - e^{-t}] = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}} \\ &= \frac{(1 - e^{-T})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-T}z^{-1})} = \frac{(1 - e^{-T})z}{(z - 1)(z - e^{-T})} \end{aligned}$$

- Seconda tecnica:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{1+s} \\ X(z) &= \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-T}z^{-1}} \end{aligned}$$

- La $\mathcal{Z}$ -trasformata $X(z)$ e la sua sequenza corrispondente $x(k)$ sono legate da una **corrispondenza univoca**
- Questo **non** avviene in genere tra la $\mathcal{Z}$ -trasformata $X(z)$ e la sua "inversa" $x(t)$
- Data una $X(z)$ si possono in genere avere **molte** $x(t)$
- Questa ambiguità **non** sussiste se sono verificate le condizioni restrittive su T dettate dal **Teorema di Shannon**

- **Diverse** funzioni tempo continuo possono avere gli **stessi** valori $x(k)$



• PROPRIETÀ E TEOREMI DELLA $\mathcal{Z}$ -TRASFORMATATA

- **Linearità:**

$$x(k) = af(k) + bg(k)$$

$$X(z) = aF(z) + bG(z)$$

- **Moltiplicazione per a^k .** Sia $X(z)$ la $\mathcal{Z}$ -trasformata di $x(k)$, a una costante.

$$\mathcal{Z}[a^k x(k)] = X(a^{-1}z)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[a^k x(k)] &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) (a^{-1}z)^{-k} \\ &= X(a^{-1}z) \end{aligned}$$

- **Teorema della traslazione nel tempo.** Se $x(t) = 0, t < 0$, $X(z) = \mathcal{Z}[x(t)]$, e $n = 1, 2, \dots$, allora

$$\mathcal{Z}[x(t - nT)] = z^{-n}X(z) \quad (\text{ritardo})$$

$$\mathcal{Z}[x(t + nT)] = z^n \left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k} \right] \quad (\text{anticipo})$$

Operativamente:

$$z^{-1}x(k) = x(k - 1)$$

$$z^{-2}x(k) = x(k - 2)$$

$$z x(k) = x(k + 1)$$

e così via.

- **Caso di ritardo:**

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x(t - nT)] &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT - nT)z^{-k} \\ &= z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT - nT)z^{-(k-n)} \end{aligned}$$

da cui, ponendo $m = k - n$,

$$\mathcal{Z}[x(t - nT)] = z^{-n} \sum_{m=-n}^{\infty} x(mT)z^{-m}$$

Poichè $x(mT) = 0$ per $m < 0$, allora si può scrivere che

$$\mathcal{Z}[x(t - nT)] = z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} x(mT)z^{-m} = z^{-n}X(z)$$

- **Caso dell'anticipo:**

$$\mathcal{Z}[x(t + nT)] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT + nT)z^{-k} = z^n \sum_{k=0}^{\infty} x(kT + nT)z^{-(k+n)} \\
 &= z^n \left[\sum_{k=0}^{\infty} x(kT + nT)z^{-(k+n)} + \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k} \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k} \right] \\
 &= z^n \left[\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k} \right] \\
 &= z^n \left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k} \right]
 \end{aligned}$$

- **Teorema del valore iniziale.**

Se $X(z)$ è la $\mathcal{Z}$ -trasformata di $x(t)$ e se esiste il $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$, allora il valore iniziale $x(0)$ di $x(t)$ è dato da:

$$x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

Infatti, si noti che

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots$$

- **Teorema del valore finale.** Siano tutti i poli di $\mathbf{X}(z)$ all'interno del cerchio unitario, con al più un polo semplice per $z = 1$.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1 - z^{-1}) \mathbf{X}(z) \right]$$

Infatti

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(k) z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(k-1) z^{-k} &= \mathbf{X}(z) - z^{-1} \mathbf{X}(z) \\ \lim_{z \rightarrow 1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(k) z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}(k-1) z^{-k} \right] &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k-1)] \\ &= [\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(-1)] + [\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}(0)] + [\mathbf{x}(2) - \mathbf{x}(1)] + \dots \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

- **Esempio:** Si consideri il segnale descritto da

$$\mathbf{X}(z) = \frac{\mathbf{T}z(z+1)}{2(z-0.5)(z-1)}$$

Il valore finale della sequenza $\mathbf{x}(kT)$ è quindi dato da

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(kT) &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{\mathbf{T}z(z+1)}{2(z-0.5)(z-1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\mathbf{T}(z+1)}{2(z-0.5)} \\ &= 2\mathbf{T} \end{aligned}$$

- **Teorema della convoluzione reale.** Siano date due funzioni $x_1(t)$ e $x_2(t)$, con $x_1(t) = x_2(t) = 0$, $t < 0$ e $\mathcal{Z}$ -trasformate $X_1(z)$, $X_2(z)$. Allora

$$X_1(z)X_2(z) = \mathcal{Z} \left[\sum_{h=0}^k x_1(hT)x_2(kT - hT) \right]$$

Per la dimostrazione, si noti che

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \left[\sum_{h=0}^k x_1(h)x_2(k-h) \right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^k x_1(h)x_2(k-h)z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} x_1(h)x_2(k-h)z^{-k} \end{aligned}$$

poichè $x_2(k-h) = 0$, $h > k$. Definendo $m = k - h$ si ha

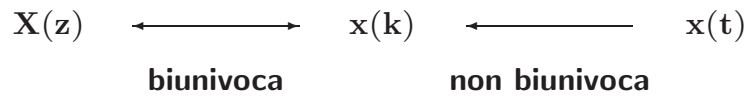
$$\mathcal{Z} \left[\sum_{h=0}^k x_1(h)x_2(k-h) \right] = \sum_{h=0}^{\infty} x_1(h)z^{-h} \sum_{m=0}^{\infty} x_2(m)z^{-m}$$

Lezione 4

Antitrasformata $\mathcal{Z}$

- **L'ANTITRASFORMATA $\mathcal{Z}$**

- Permette di passare da una $\mathcal{Z}$ -trasformata $\mathbf{X}(z)$ alla corrispondente sequenza x_k e possibilmente alla funzione continua $x(t)$ cui corrisponde per campionamento la sequenza x_k .



- Se è soddisfatto il **Teorema di Shannon** sul campionamento, la funzione continua $x(t)$ può essere univocamente determinata a partire dalla sequenza x_k .

- Diversi **metodi per antitrasformare** una funzione $\mathbf{X}(z)$:

- 1) Metodo della lunga divisione;
- 2) Metodo computazionale;
- 3) Metodo della scomposizione in fratti semplici;
- 4) Metodo dell'integrale di inversione.

- **Metodo della scomposizione in fratti semplici**

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n)}$$

- **Caso 1.** Se tutti i poli sono semplici, si pone

$$X(z) = \frac{c_1}{z - p_1} + \frac{c_2}{z - p_2} + \dots + \frac{c_n}{z - p_n} = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{z - p_i}$$

dove i coefficienti c_i , detti "residui", sono parametri che vengono calcolati come:

$$c_i = [(z - p_i)X(z)]_{z=p_i}$$

- Se nella espressione di $X(z)$ compare almeno **uno zero nell'origine**, si utilizza la funzione $X(z)/z$ e quindi

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_1}{z - p_1} + \dots + \frac{c_n}{z - p_n} \quad c_i = \left[(z - p_i) \frac{X(z)}{z} \right]_{z=p_i}$$

Quando sono presenti **poli complessi coniugati**, i coefficienti c_i sono anch'essi complessi. In questo caso si ricorre alle formule di Eulero per ottenere funzioni trigonometriche. L'espressione finale cercata è quindi

$$x(k) = \sum_{i=1}^n c_i p_i^k$$

- **Caso 2.** Se $X(z)$, o $X(z)/z$, ha **poli multipli**

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{(z - p_1)^{r_1} (z - p_2)^{r_2} \dots (z - p_h)^{r_h}}$$

allora si può porre

$$X(z) = \sum_{i=1}^h \sum_{k=1}^{r_i} \frac{c_{ik}}{(z - p_i)^{r_i - k + 1}}$$

dove i residui si calcolano come

$$c_{ik} = \left[\frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - p_i)^{r_i} X(z) \right]_{z=p_i}$$

$$i = 1, \dots, h; \quad k = 1, \dots, r_i$$

- **Esempio.** Antitrasformare la funzione

$$X(z) = \frac{1}{z^4 + 6z^3 + 13z^2 + 12z + 4} = \frac{1}{(z+2)^2(z+1)^2}$$

Si ha che

$$X(z) = \frac{c_{11}}{(z+2)^2} + \frac{c_{12}}{(z+2)} + \frac{c_{21}}{(z+1)^2} + \frac{c_{22}}{(z+1)}$$

$$c_{11} = [(z+2)^2 X(z)]|_{z=-2} = 1$$

$$c_{12} = \left[\frac{d}{dz} (z+2)^2 X(z) \right]_{z=-2} = 2$$

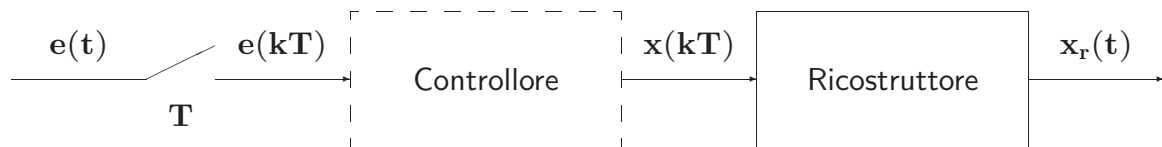
$$c_{21} = [(z+1)^2 X(z)]_{z=-1} = 1$$

$$c_{22} = \left[\frac{d}{dz} (z+1)^2 X(z) \right]_{z=-1} = -2$$

Lezione 5

Il Problema del Campionamento

- I sistemi in retroazione con controllo digitale sono caratterizzati da una **parte continua** (il processo da controllare) e una **parte discreta** (il controllore digitale)
- Sono quindi presenti sia variabili a tempo **discreto** sia variabili a tempo **continuo**
- I dispositivi di interfaccia sono il **campionatore** e il **ricostruttore**



- Ricostruttore di ordine zero:

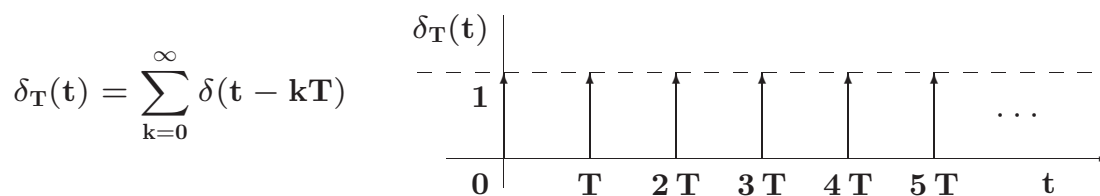
$$x_r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) [h(t - kT) - h(t - (k+1)T)]$$

$$X_r(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \left[\frac{e^{-kTs} - e^{-(k+1)Ts}}{s} \right]$$

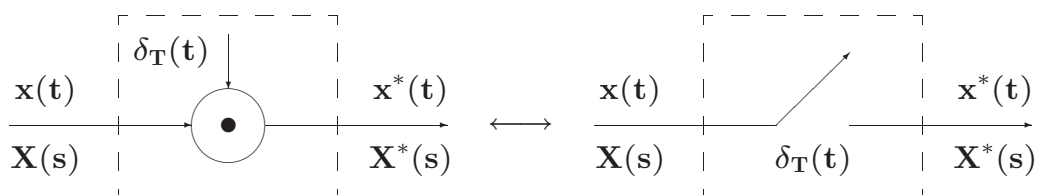
$$= \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}$$

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}$$

$$x^*(t) = \mathcal{L}^{-1}[X^*(s)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT)$$

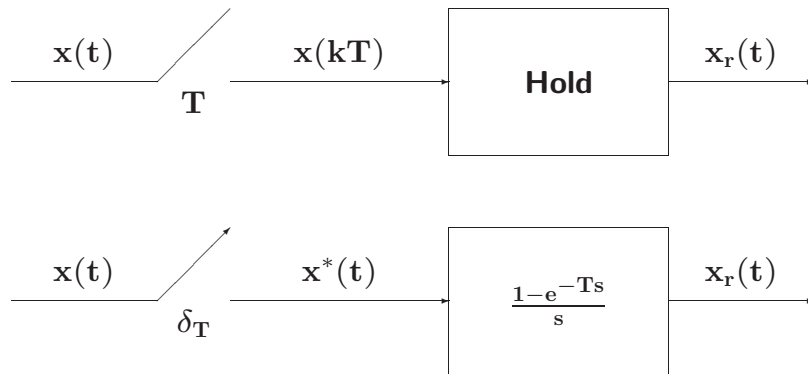


$$\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$$



- Il campionatore impulsivo è un modello ideale del campionatore reale (convertitore A/D) considerato adeguato alle esigenze di analisi e progetto dei controlli digitali
- L'uscita del ricostruttore di ordine zero vale:

$$X_r(s) = H_0(s) X^*(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} X^*(s)$$



$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}$$

$$z = e^{sT} \quad \longleftrightarrow \quad s = \frac{1}{T} \ln z$$

$$X^*(s) \Big|_{s=\frac{1}{T} \ln z} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}$$

- La trasformata zeta della sequenza $x(kT)$ anziché la trasformata di Laplace del segnale $x^*(t)$ permette di operare con funzioni razionali fratte.

$$\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}(t) \delta_T(t) = \mathbf{x}(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_s t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T \delta_T(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T}$$

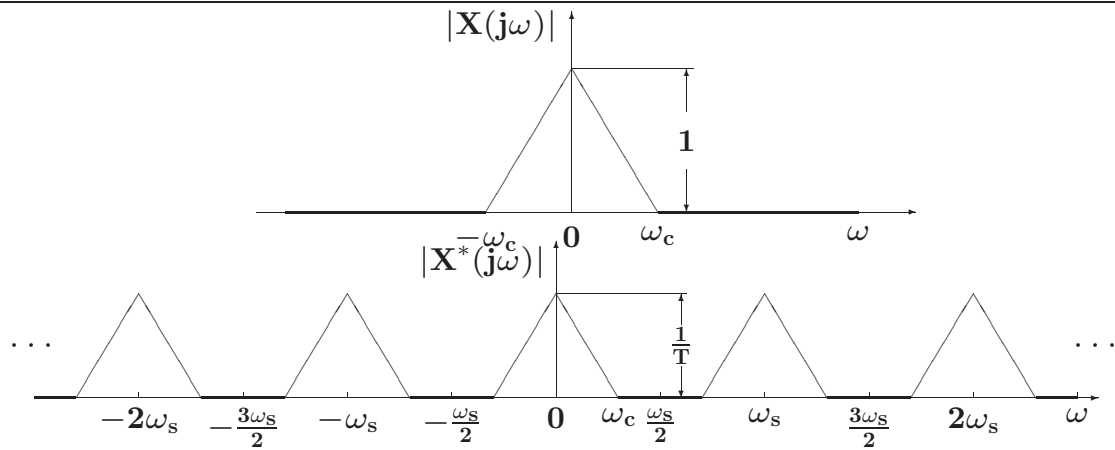
ne segue

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(t) &= \mathbf{x}(t) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(t) e^{jn\omega_s t} \end{aligned}$$

$$\mathbf{X}^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}[\mathbf{x}(t) e^{jn\omega_s t}] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}(s - jn\omega_s)$$

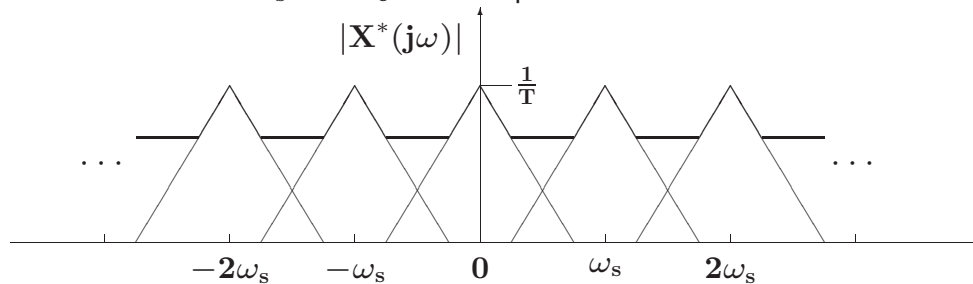
- A meno della costante moltiplicativa $1/T$, la trasformata di Laplace $\mathbf{X}^*(s)$ del segnale campionato si ottiene dalla somma degli infiniti termini, $\mathbf{X}(s - jn\omega_s)$, ciascuno dei quali si ottiene dalla $\mathbf{X}(s)$ mediante traslazione di $jn\omega_s$ nel campo complesso.
- L'andamento spettrale del segnale campionato vale:

$$\mathbf{X}^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}(j\omega - jn\omega_s)$$



- La condizione $\omega_s > 2\omega_c$ mantiene distinto lo spettro originario dalle componenti complementari per cui, mediante filtraggio, è possibile ricostruire completamente il segnale $x(t)$

- Nel caso in cui la condizione $\omega_s > 2\omega_c$ non è rispettata:



- Lo spettro originario è parzialmente sovrapposto alle componenti complementari contigue per cui mediante filtraggio non è più possibile ricavare il segnale originario a partire dal segnale campionato

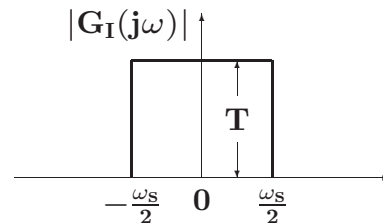
- **Teorema di Shannon**

Sia $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ la pulsazione di campionamento (T è il periodo di campionamento), e sia ω_c la più alta componente spettrale del segnale tempo-continuo $x(t)$. Il segnale $x(t)$ è completamente ricostruibile a partire dal segnale campionato $x^*(t)$ se e solo se la pulsazione ω_s è maggiore del doppio della pulsazione ω_c :

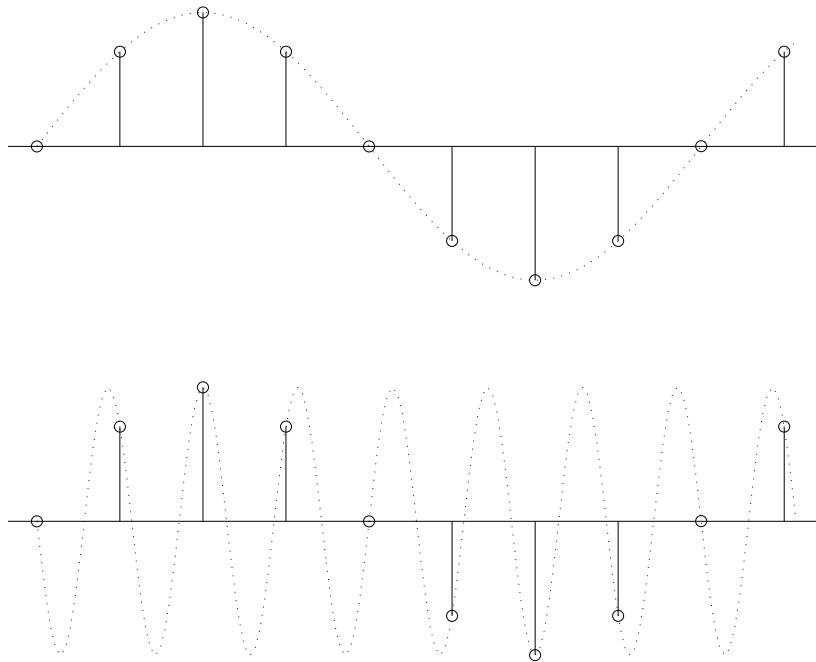
$$\omega_s > 2\omega_c$$

- Ricostruzione mediante filtro ideale

$$G_I(j\omega) = \begin{cases} T & -\frac{\omega_s}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



- **Aliasing:** Con il termine **aliasing** si indica quel fenomeno per il quale, mediante campionamento, si generano delle nuove componenti spettrali (armoniche) alla stessa frequenza della componente spettrale di partenza che impediscono la corretta ricostruzione del segnale di partenza.
- Si può avere aliasing solo nel caso in cui la condizione $\omega_s > 2\omega_c$ del teorema di Shannon non sia verificata



- Per evitare fenomeni di aliasing si deve provvedere ad introdurre un opportuno filtraggio passa-basso **prima** del campionatore.

Lezione 6

Ricostruttori di Segnale - Relazione tra Piano s e Piano z

- Tipici ricostruttori di segnale

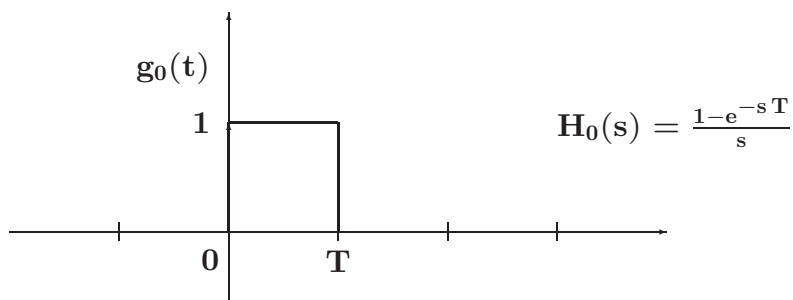


$$x_r(t) = x(kT) + \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=kT} (t - kT) + \left. \frac{d^2x(t)}{dt^2} \right|_{t=kT} \frac{(t - kT)^2}{2!} + \dots$$

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=kT} \simeq \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} \quad \dots$$

- Ricostruttore di ordine zero

$$x_0(t) = x(kT) \quad kT \leq t < (k+1)T$$



- La risposta frequenziale del ricostruttore di ordine zero:

$$\begin{aligned} H_0(j\omega) &= \frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega} = \frac{2e^{-j\omega T/2}}{\omega} \frac{e^{j\omega T/2}-e^{-j\omega T/2}}{2j} \\ &= T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{-j\omega T/2} \end{aligned}$$

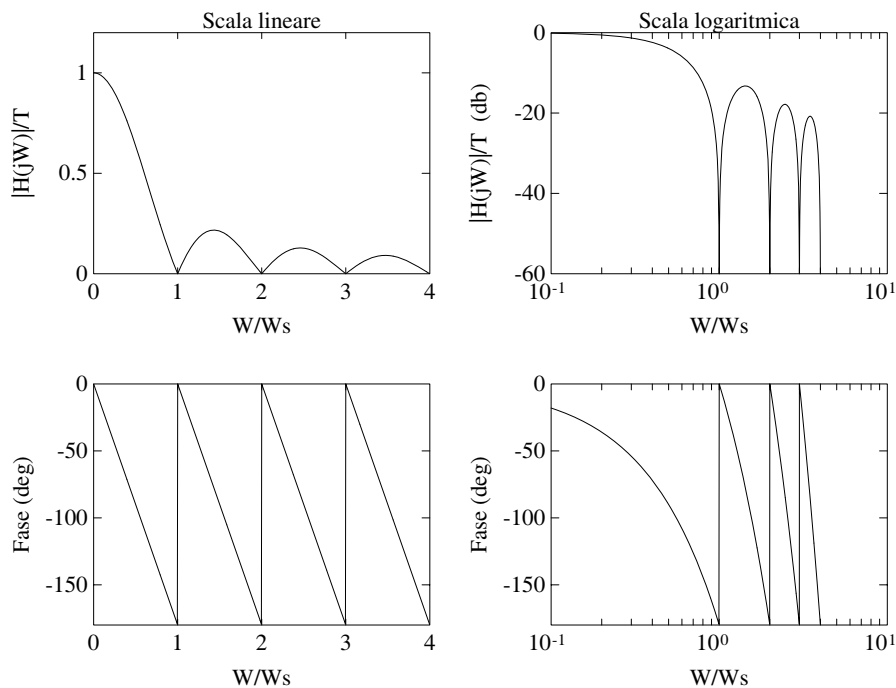
- Modulo

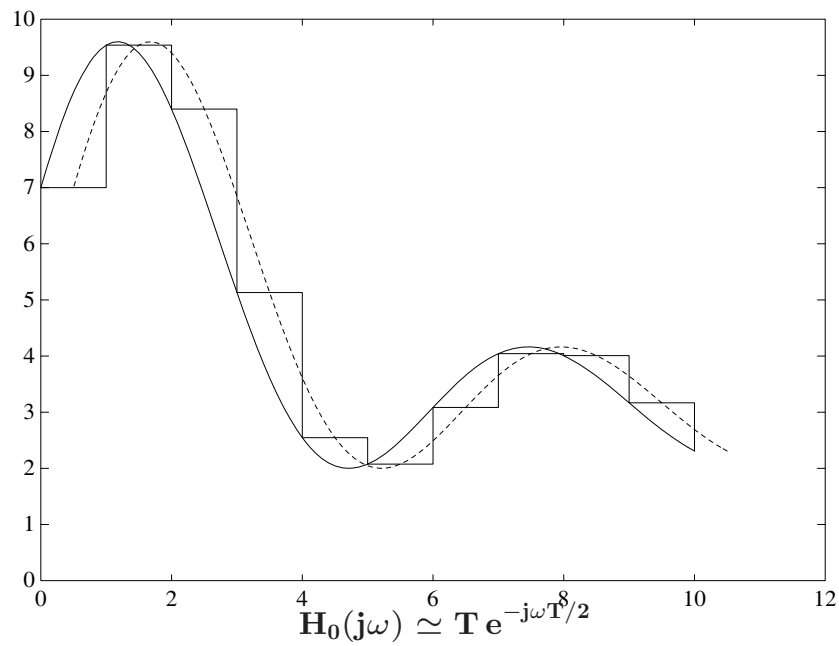
$$|H_0(j\omega)| = T \left| \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right|$$

- Fase

$$\text{Arg}[H_0(j\omega)] = \text{Arg}\left[\sin \frac{\omega T}{2}\right] - \frac{\omega T}{2}$$

- Ricostruttore di ordine zero





- Corrispondenza tra piano s e piano z

$$\mathbf{X}^*(s) = \mathbf{X}(z)|_{z=e^{sT}}$$

- Le variabili complesse s e z sono legate dalla relazione

$$z = e^{sT}$$

- Posto $s = \sigma + j\omega$ si ha

$$z = e^{T(\sigma + j\omega)} = e^{T\sigma} e^{jT\omega} = e^{T\sigma} e^{jT(\omega + \frac{2k\pi}{T})}$$

- Ogni punto del piano z è in corrispondenza con infiniti punti del piano s

- I punti del piano s a parte reale negativa ($\sigma < 0$) sono in corrispondenza con i punti del piano z all'interno del cerchio unitario:

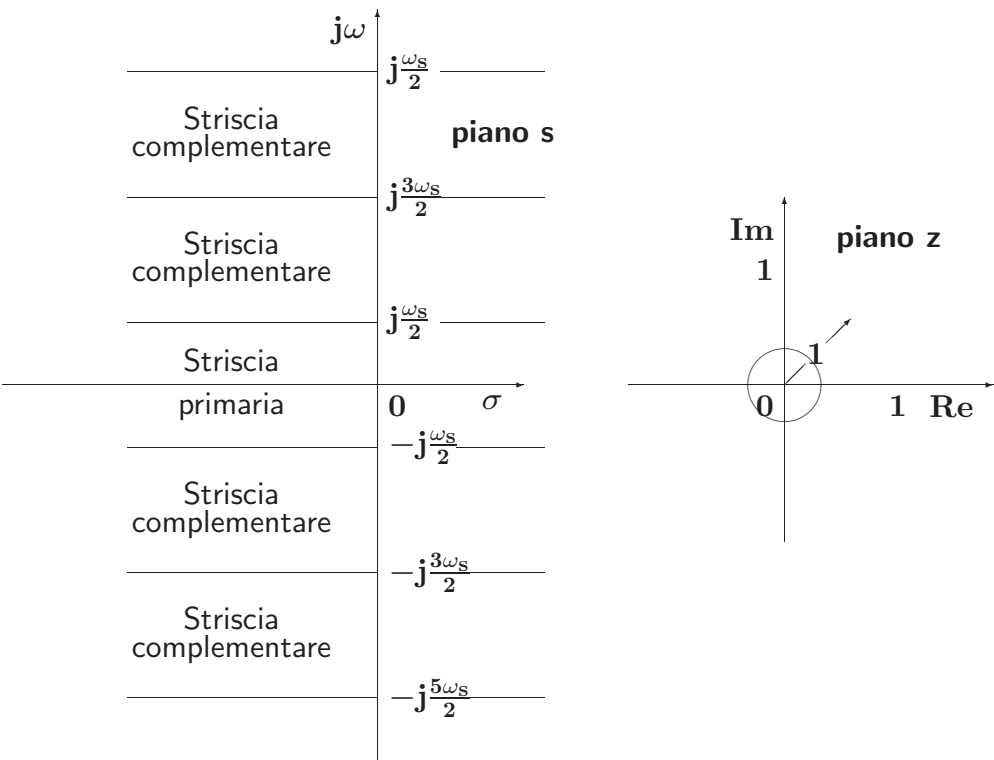
$$|z| = e^{T\sigma} < 1$$

- I punti sull'asse immaginario ($\sigma = 0$) vengono mappati sul cerchio unitario ($|z| = 1$), mentre quelli a parte reale positiva ($\sigma > 0$) vengono mappati all'esterno del cerchio unitario ($|z| > 1$).
- La striscia di piano s delimitata dalle rette orizzontali $s = j\omega_s/2$ e $s = -j\omega_s/2$ prende il nome di **striscia primaria**

Lezione 7

Funzioni di Trasferimento Discrete

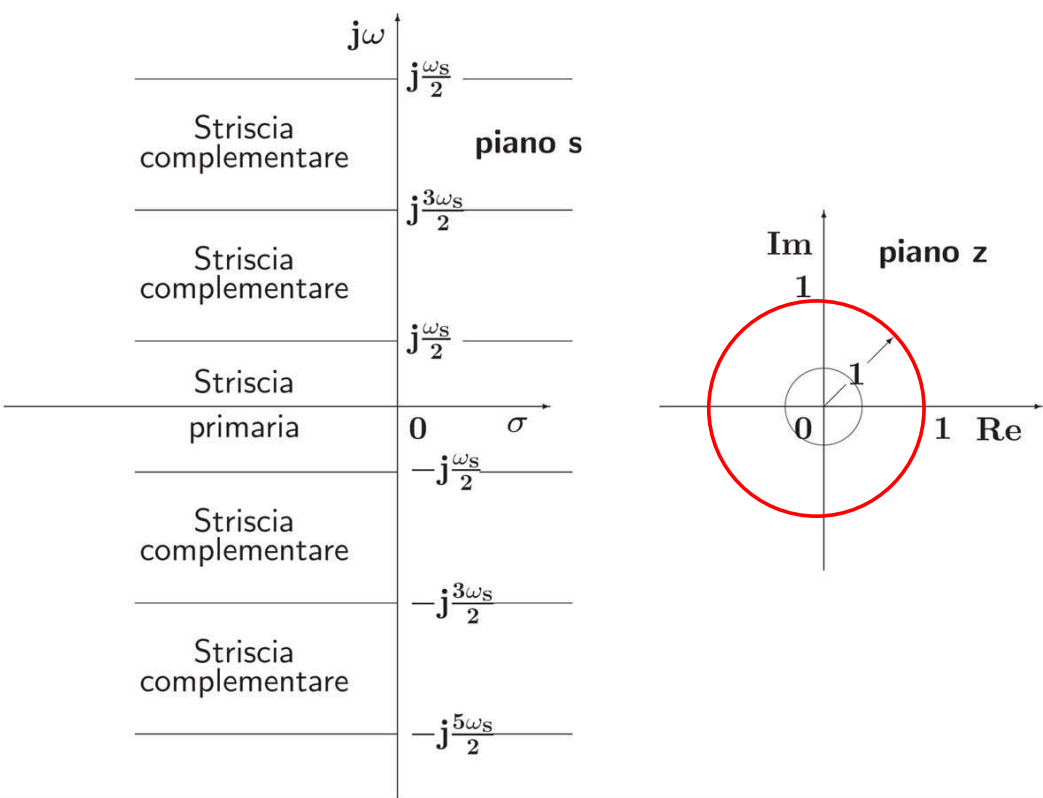
● Striscia primaria e Strisce complementari



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1E, I-44123, Ferrara, Italia

Sistemi di Controllo Digitale

● Striscia primaria e Strisce complementari



Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1E, I-44123, Ferrara, Italia

Sistemi di Controllo Digitale

- Le variabili complesse s e z sono legate dalla relazione

$$z = e^{sT}$$

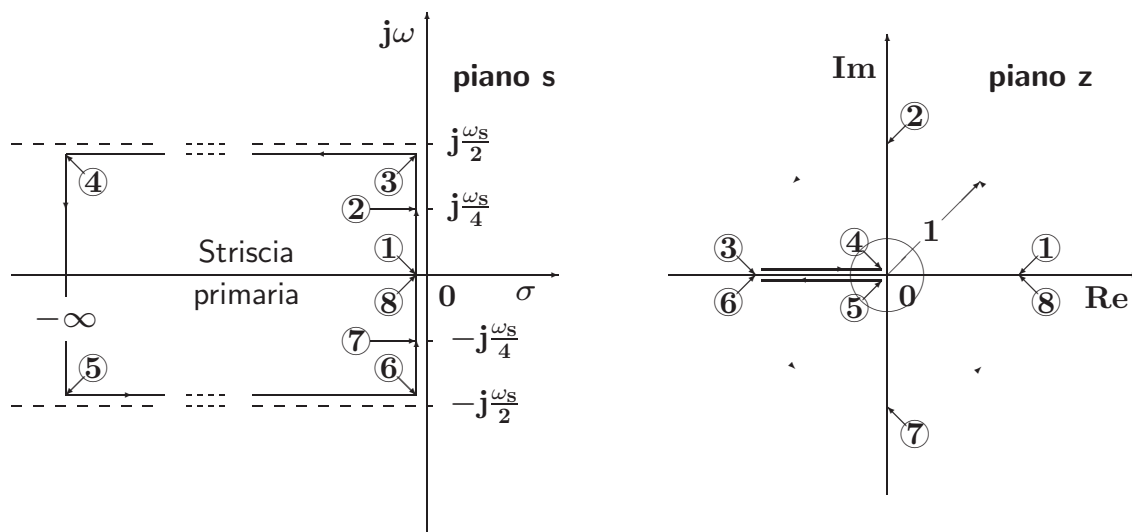
- Posto $s = \sigma + j\omega$ si ha

$$z = e^{T(\sigma + j\omega)} = e^{T\sigma} e^{jT\omega}$$

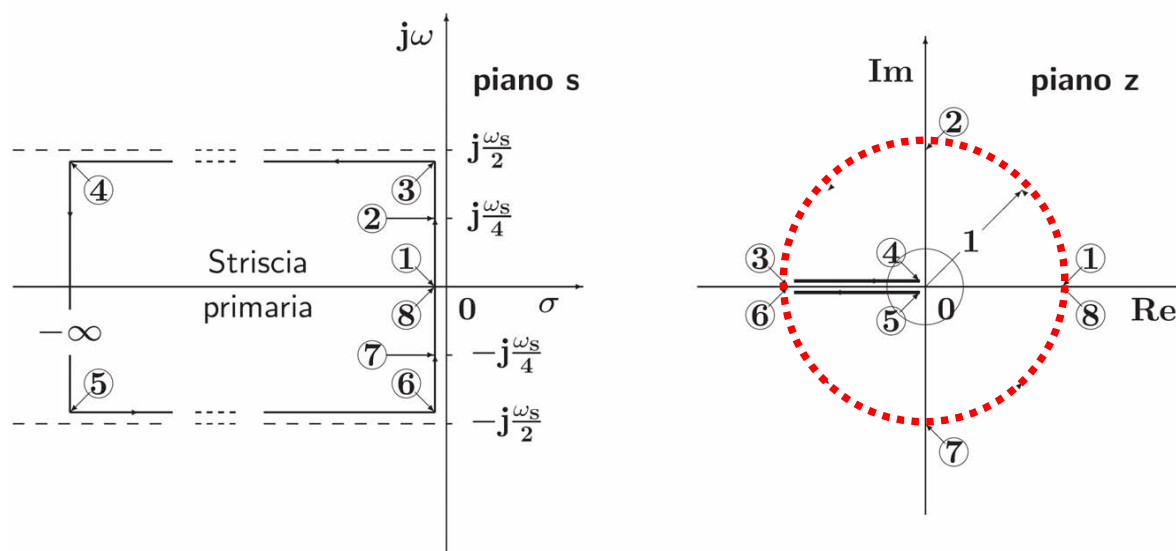
dove

$$0 \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$$

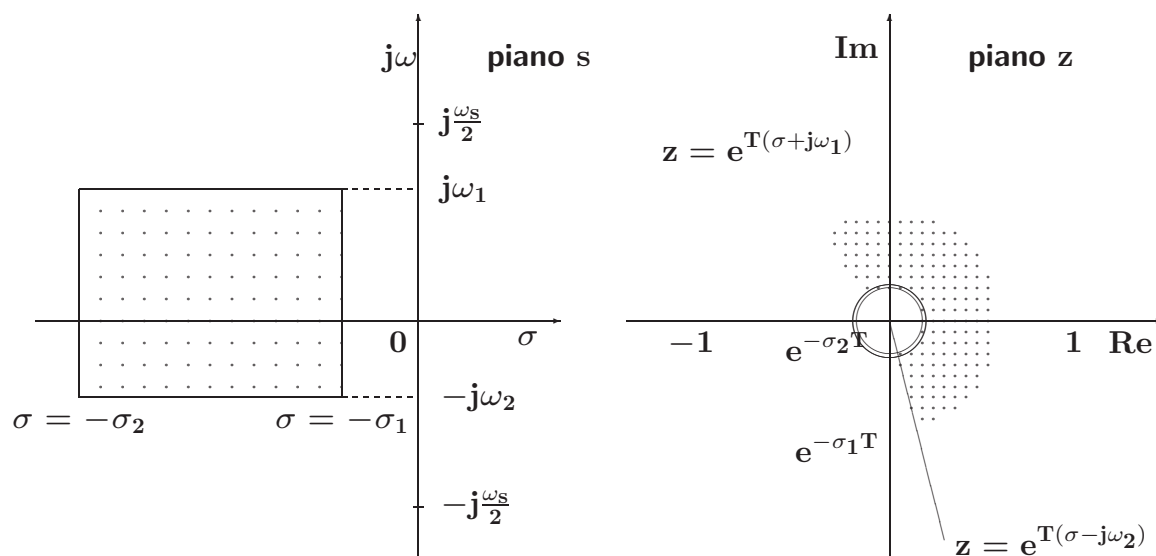
- Mapping tra striscia primaria e piano z



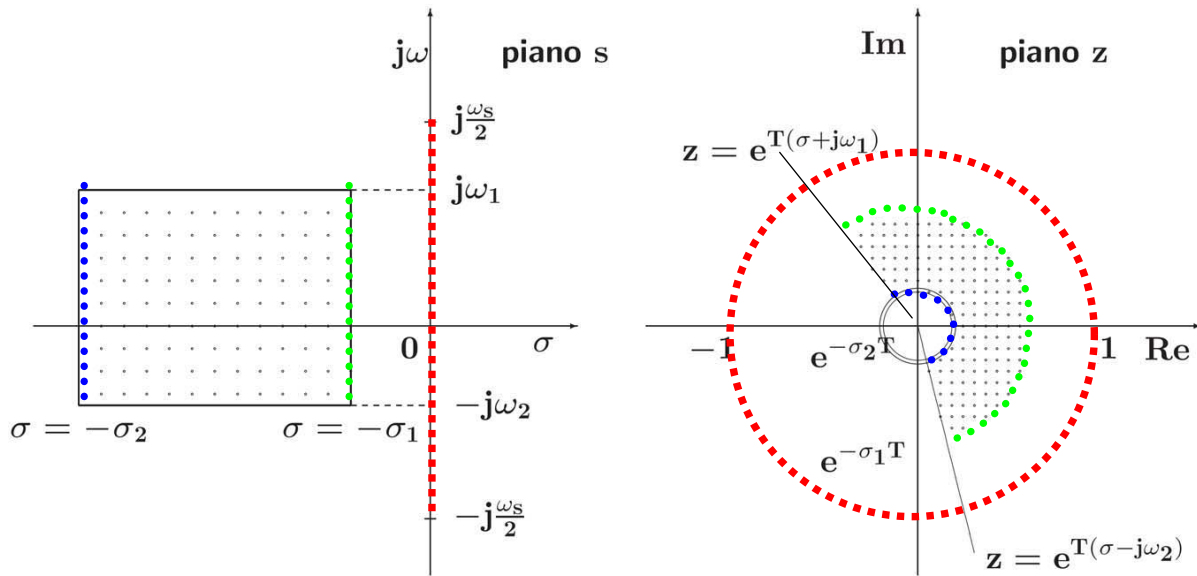
- Mapping tra striscia primaria e piano z



- Un esempio di corrispondenza fra due regioni del piano s e del piano z



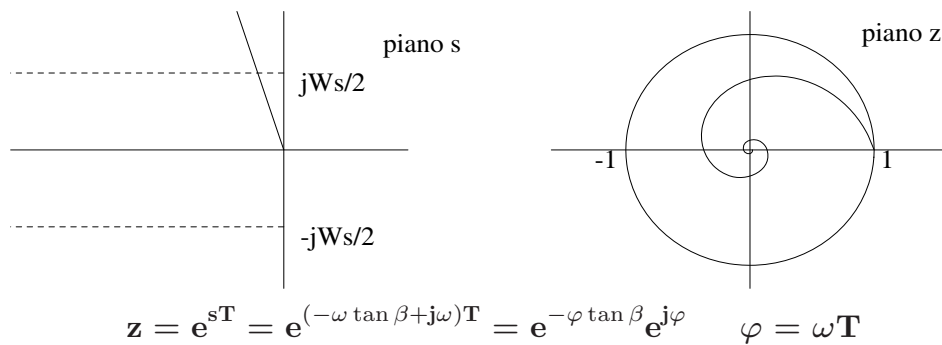
- Un esempio di corrispondenza fra due regioni del piano s e del piano z



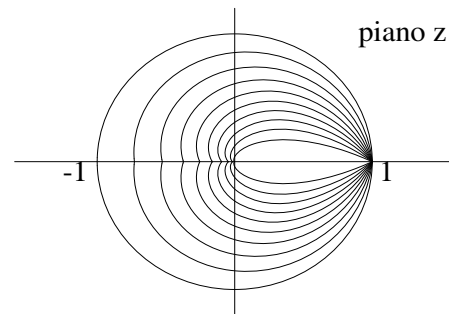
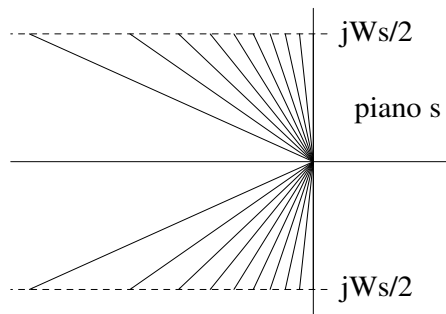
- Luogo dei punti a coefficiente di smorzamento costante $\delta = \delta_1$

$$s = -\omega \tan \beta + j\omega = -\omega \frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}} + j\omega$$

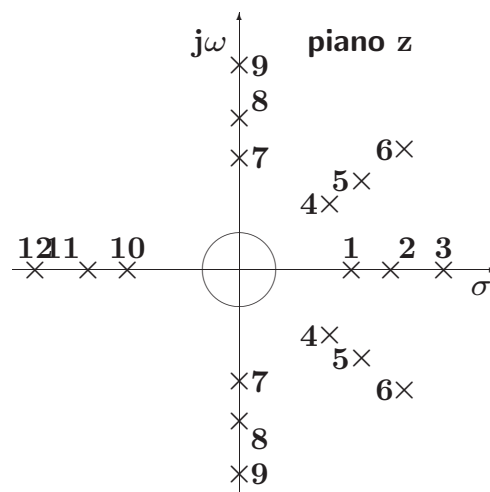
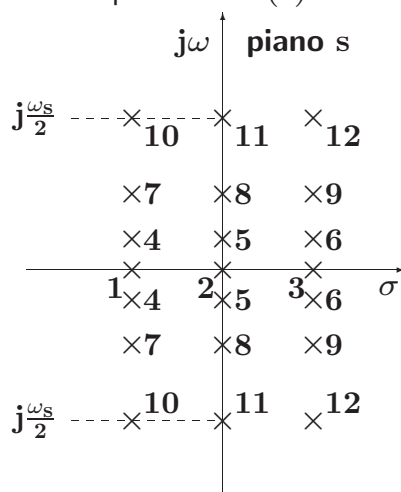
$$\beta = \arcsin \delta_1$$



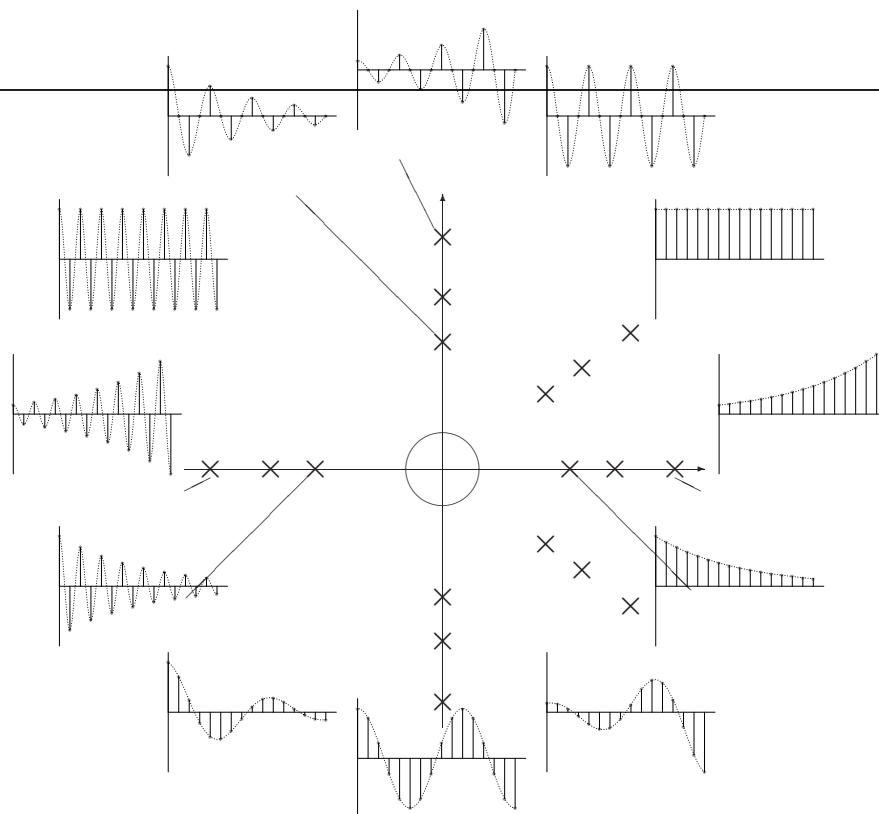
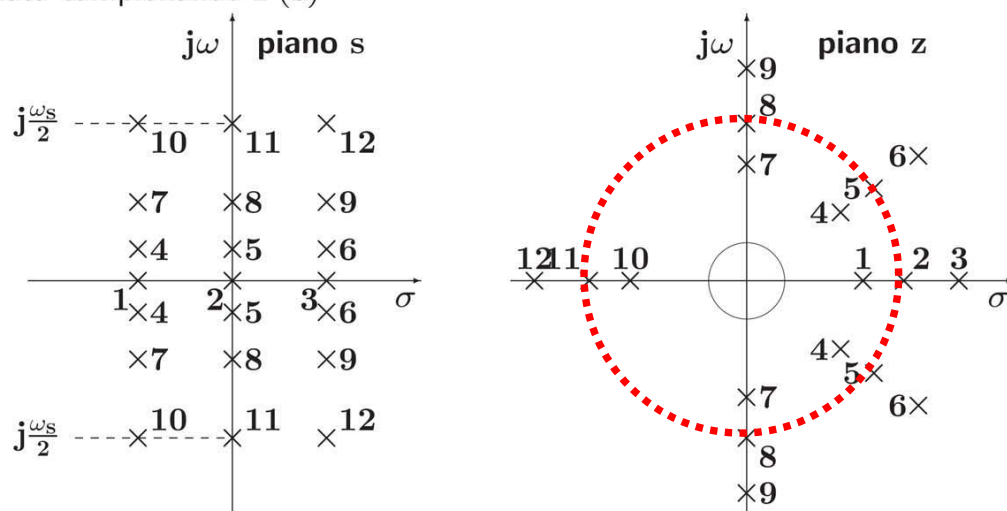
- Luoghi a coefficiente di smorzamento δ costante

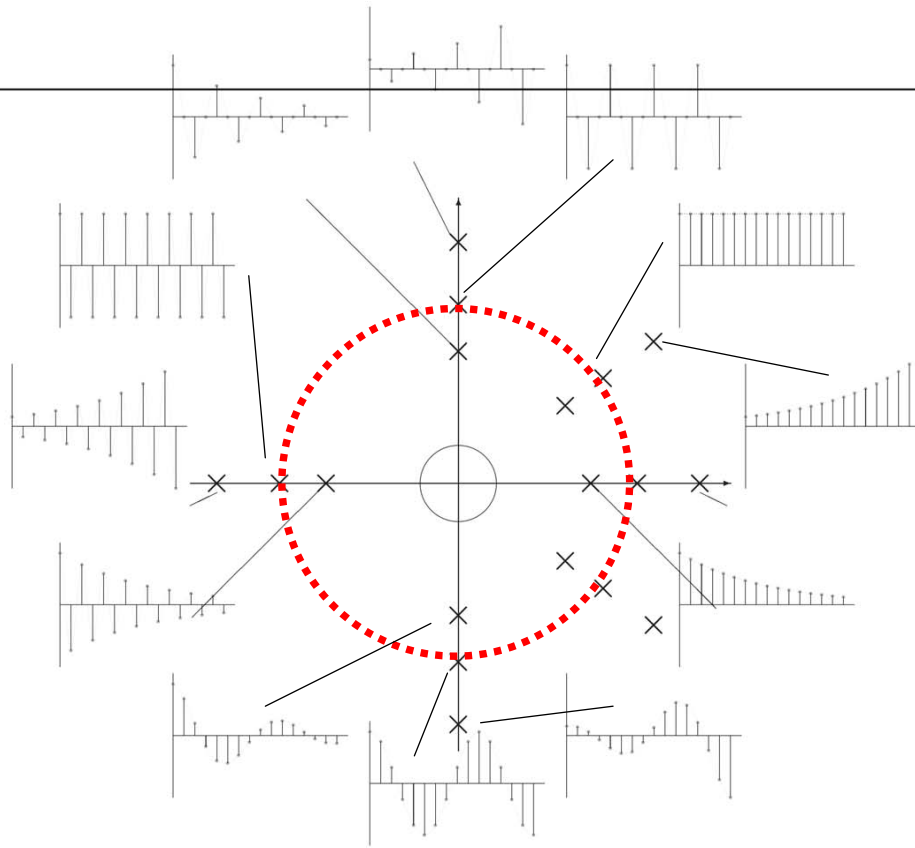


- I punti del piano s e del piano z, posti in corrispondenza per mezzo della relazione $z = e^{sT}$, possono essere considerati come poli corrispondenti di trasformate $F(s)$ ed $F(z)$, con $F(z)$ calcolata campionando $F(s)$



- I punti del piano s e del piano z , posti in corrispondenza per mezzo della relazione $z = e^{sT}$, possono essere considerati come poli corrispondenti di trasformate $F(s)$ ed $F(z)$, con $F(z)$ calcolata campionando $F(s)$



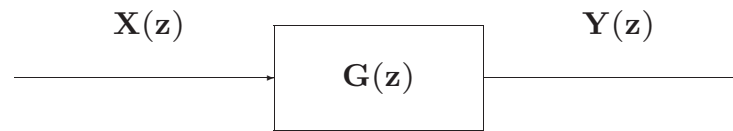


Lezione 8

Composizione di Schemi a Blocchi

Funzione di trasferimento discreta

$$y(kT) = \sum_{h=0}^{\infty} g(kT - hT)x(hT)$$



$$X(z) = \mathcal{Z}[x(kT)] = 1$$

$$Y(z) = G(z)$$

Funzione di Risposta Armonica Discreta

$$G(e^{j\omega T}), \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$$

$$G(e^{j(\omega+k\omega_s)T}) = G(e^{j\omega T}), \quad G(e^{j(-\omega)T}) = G^*(e^{j\omega T})$$

- La risposta di un sistema $G(z)$ asintoticamente stabile ad un ingresso sinusoidale $\sin(\omega kT)$ di ampiezza unitaria è, a regime, una sinusoide $A \sin(\omega kT + \varphi)$ la cui ampiezza A è data dal modulo del vettore $G(e^{j\omega T})$, e la cui fase φ è data dalla fase del vettore $G(e^{j\omega T})$:

$$A = |G(e^{j\omega T})| \quad \varphi = \text{Arg}[G(e^{j\omega T})]$$

•

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(z) &= \mathcal{Z}[\sin(\omega t)] = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - (2 \cos \omega T)z + 1} \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{z}{z - e^{j\omega T}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega T}} \right) \end{aligned}$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{G}(z) \mathbf{X}(z)$$

$$= \mathbf{Y}_0(z) + \frac{|G(e^{j\omega T})|}{2j} \left(\frac{e^{j(\omega T + \varphi)} z}{z - e^{j\omega T}} - \frac{e^{-j(\omega T + \varphi)} z}{z - e^{-j\omega T}} \right)$$

somma di un termine transitorio $\mathbf{Y}_0(z)$ che si annulla asintoticamente, corrispondente ai poli stabili di $\mathbf{G}(z)$, e un termine sinusoidale di ampiezza $|G(e^{j\omega T})|$ e fase $\varphi = \text{Arg}[G(e^{j\omega T})]$.

Lezione 9

Stabilità per Sistemi a Tempo Discreto

Stabilità dei sistemi discreti

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

- Stabilità semplice
- Stabilità asintotica
- Stabilità ingresso limitato - uscita limitata

- Il comportamento dinamico di un sistema

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

dipende dai poli di $G(z)$, cioè dalle radici del polinomio $A(z)$.

- Esempio

$$G(z) = \frac{4z^{-1}}{1 + az^{-1}} = \frac{4}{z + a}$$

in risposta a

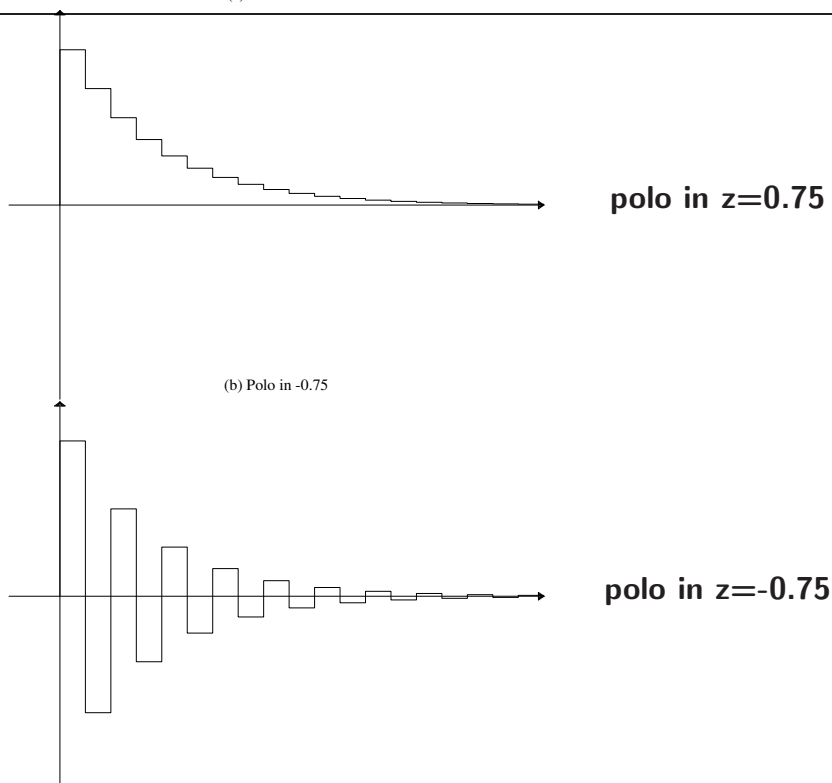
$$u(0) = 1, \quad u(k) = 0, \quad k > 0;$$

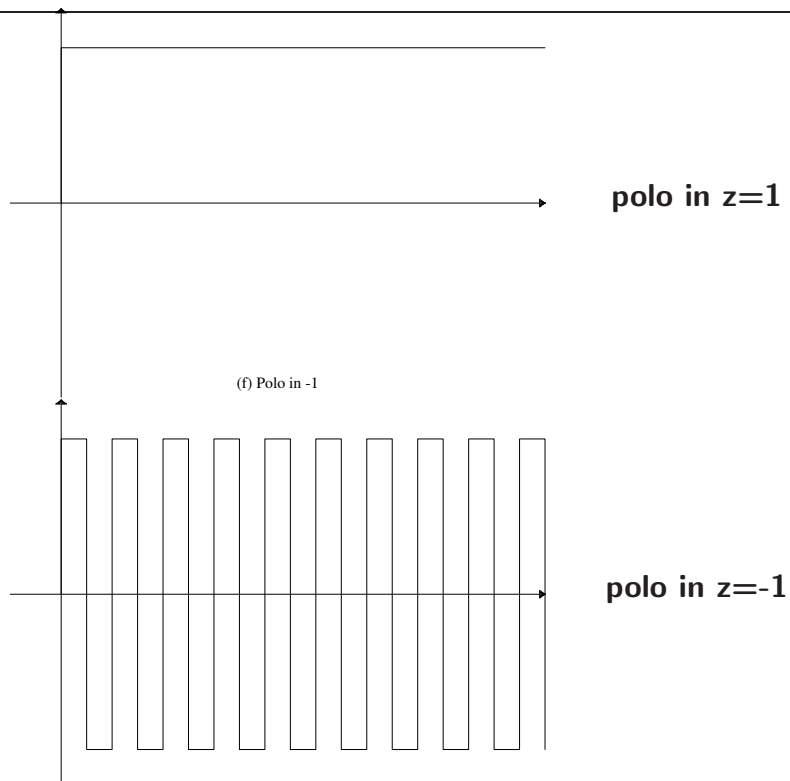
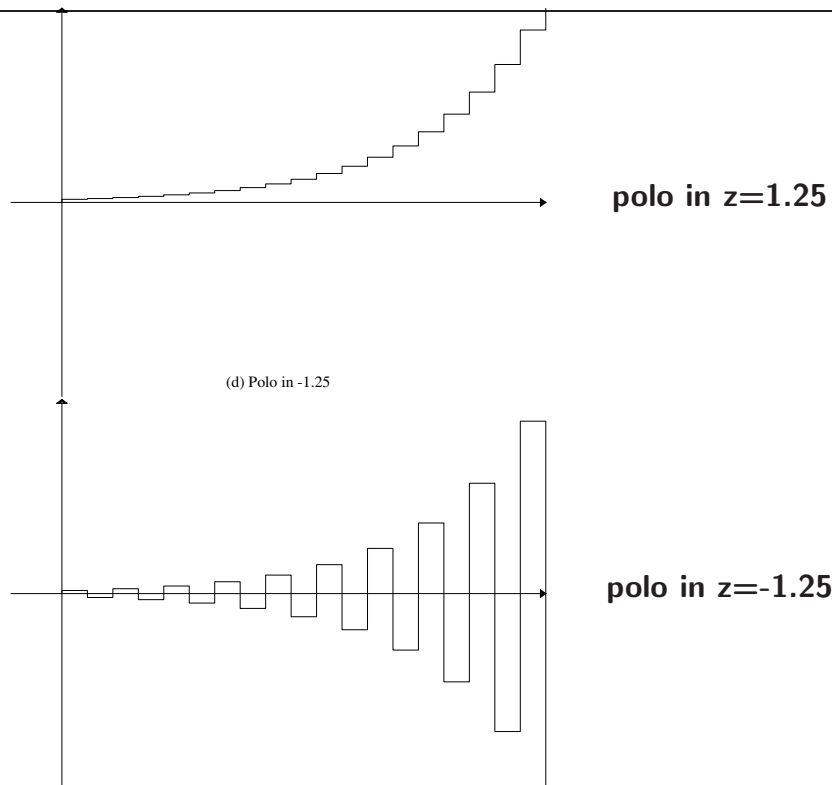
in corrispondenza ai valori $a = 0.75$, $a = -0.75$, $a = 1.25$, $a = -1.25$, $a = 1$, $a = -1$

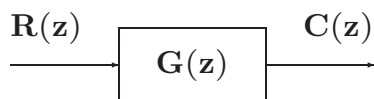
$$Y(z)(1 + az^{-1}) = 4z^{-1}U(z)$$

$$y(k) = -ay(k-1) + 4u(k-1)$$

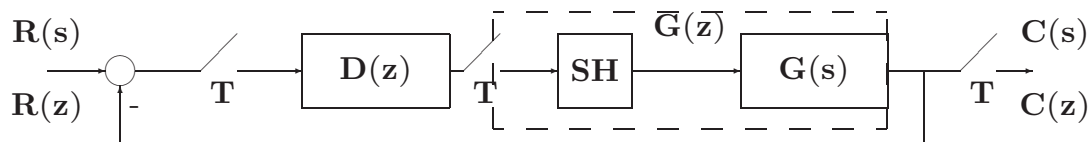
$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(1) &= 4u(0) = 4 \\ y(2) &= -ay(1) + 4u(1) = -4a \\ y(3) &= -ay(2) + 4u(2) = 4a^2 \\ y(4) &= -ay(3) + 4u(3) = -4a^3 \\ y(5) &= -ay(4) + 4u(4) = 4a^4 \\ &\dots \\ y(k) &= -ay(k-1) + 4u(k-1) = 4(-a)^{k-1} \end{aligned}$$





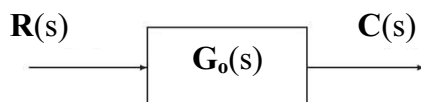


(a)

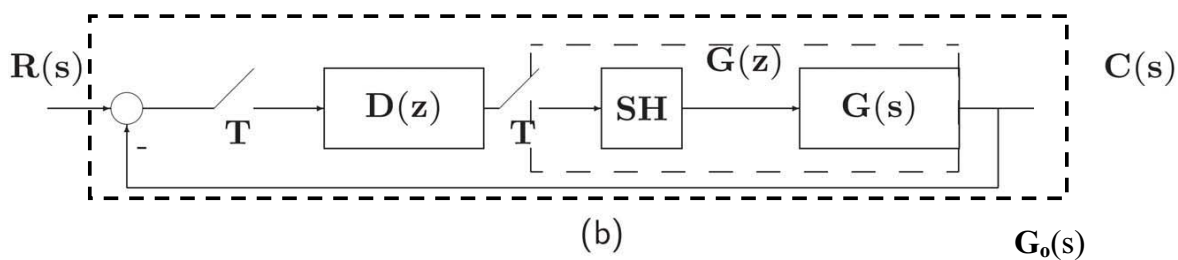


(b)

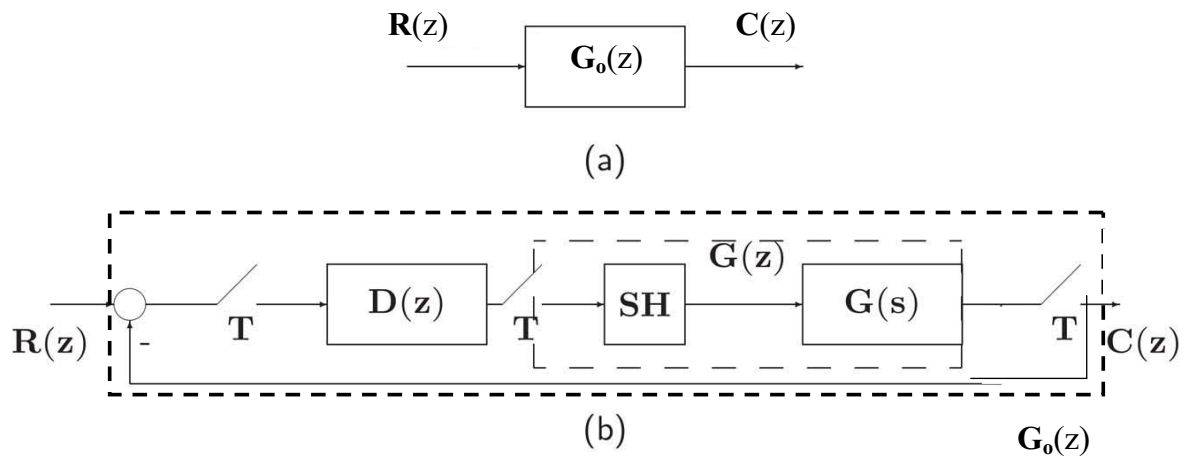
$$G_0(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)}$$



(a)



(b)



$$G_0(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)}$$

- Sia dato un sistema descritto da

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad \text{oppure} \quad G_0(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)}$$

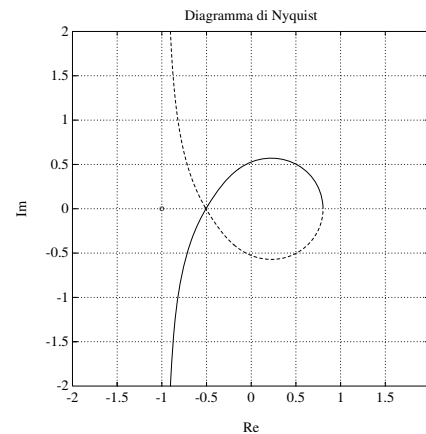
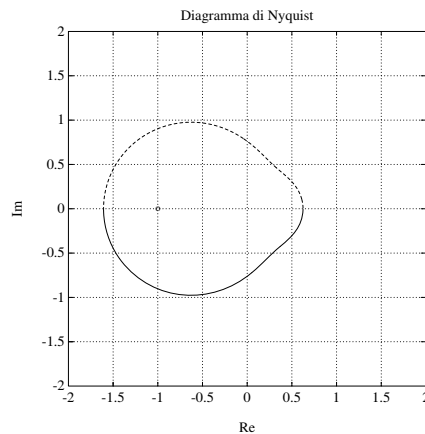
- Il sistema è asintoticamente stabile se e solo se tutte le radici del polinomio $A(z)$ (o del polinomio $1 + D(z)G(z)$), cioè i poli del sistema, sono entro il cerchio di raggio unitario con centro nell'origine del piano z ossia $|p_i| < 1, \forall i$.
- Il sistema è stabile se tutti i poli a modulo unitario $|p_i| = 1$ sono poli semplici (la loro molteplicità è 1), mentre tutti i rimanenti poli sono entro il cerchio unitario.

Lezione 10**Stabilità - Luogo delle radici**

- Il **Criterio di Nyquist** permette di decidere circa la stabilità di sistemi in retroazione analizzando il comportamento frequenziale della risposta armonica di anello in rapporto al **punto critico** $(-1 + j0)$

$$G(e^{j\omega T}), \quad -\frac{\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$$

- Se la $G(z)$ è di tipo 0, allora il diagramma relativo è una curva chiusa; se è di tipo 1 o 2, allora si ha una curva aperta, che viene chiusa con una circonferenza o semicirconferenza all'infinito percorsa in senso orario

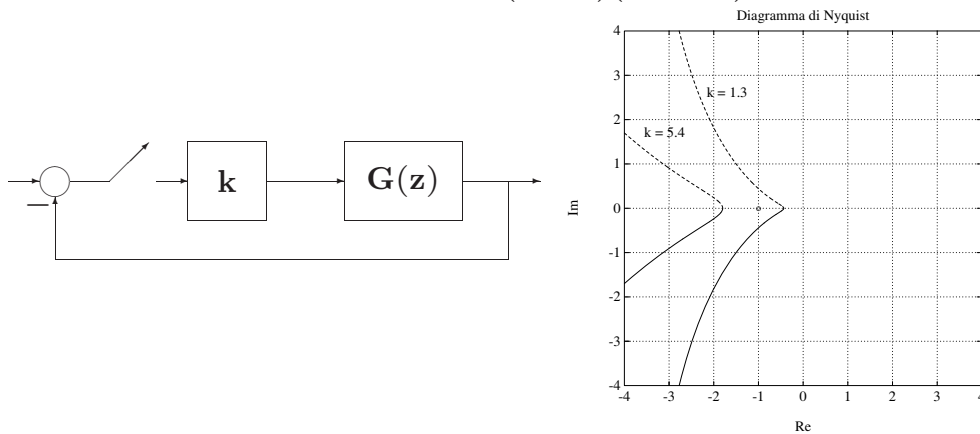


• Criterio di Nyquist I

Sia data una funzione di guadagno d'anello $G(z)$ con tutti i poli stabili (a modulo minore di uno), con l'eventuale eccezione di un polo semplice o doppio in $z = 1$. Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $G(e^{j\omega T})$ tracciato per $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$ non circonda nè tocchi il punto critico $-1 + j0$

- Esempio:

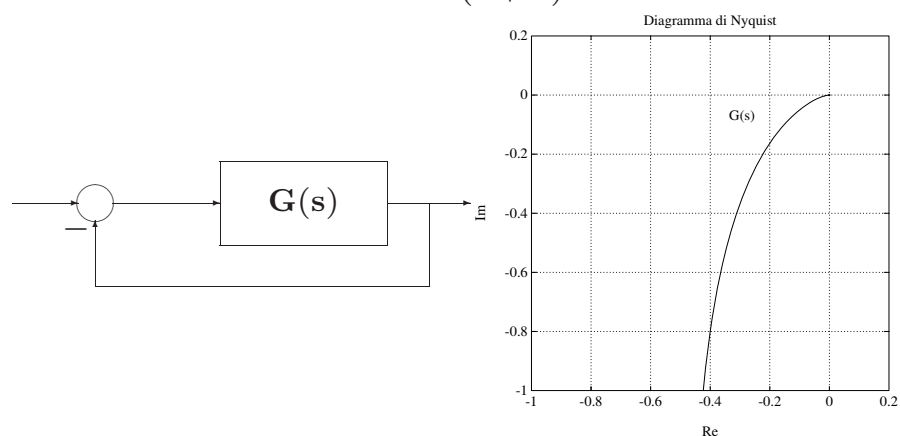
$$G(z) = \frac{z}{(z-1)(z-0.5)}$$



- Si ha stabilità per il sistema in retroazione con $k = 1.3$ ed instabilità con $k = 5.4$

- Esempio

$$G(s) = \frac{2}{s(s+2)}$$

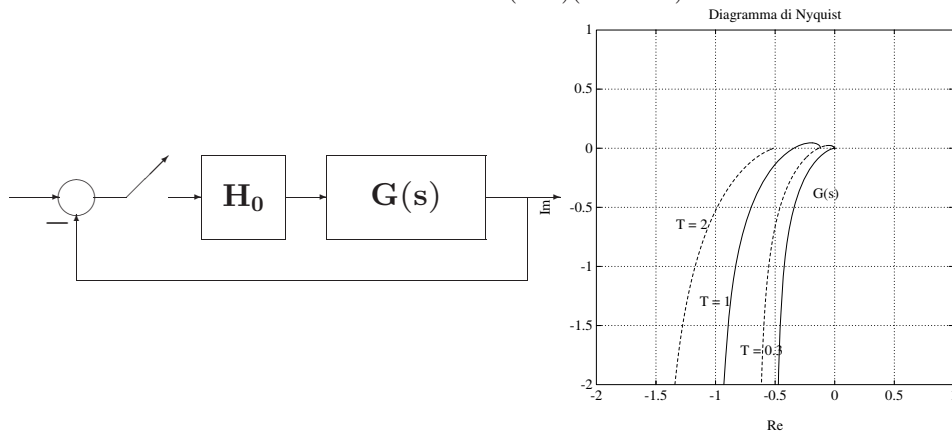


- Il sistema è stabile

- Si desidera ora studiare la stabilità del sistema in retroazione con campionamento di periodo T e ricostruttore di ordine zero

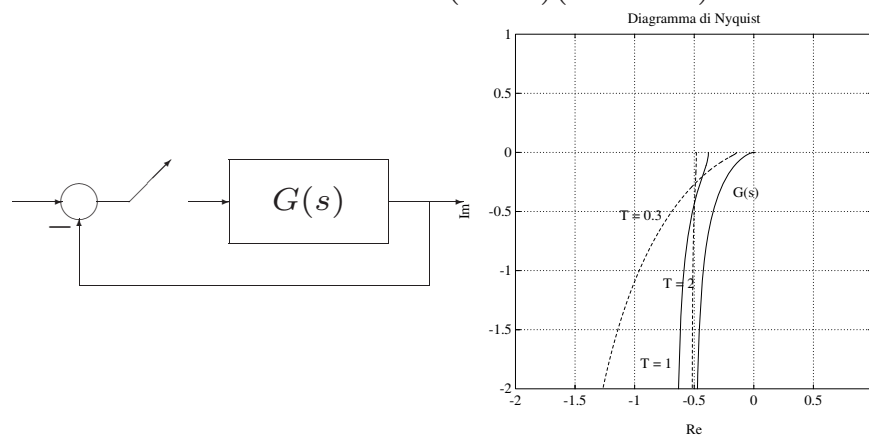
$$G(z) = \mathcal{Z}[H_0(s)G(s)] = \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s} \frac{2}{s(s+2)}\right]$$

$$= \frac{(2T-1+e^{-2T})z + (1-e^{-2T}-2Te^{-2T})}{2(z-1)(z-e^{-2T})}$$



- Senza ricostruttore:

$$G'(z) = \mathcal{Z}[G(s)] = \frac{z(1 - e^{-2T})}{(z - 1)(z - e^{-2T})}$$



- Luogo delle radici

È il luogo descritto dagli zeri di una funzione

$$F(s) = 1 + k G(s) = 1 + k \frac{B(s)}{A(s)}$$

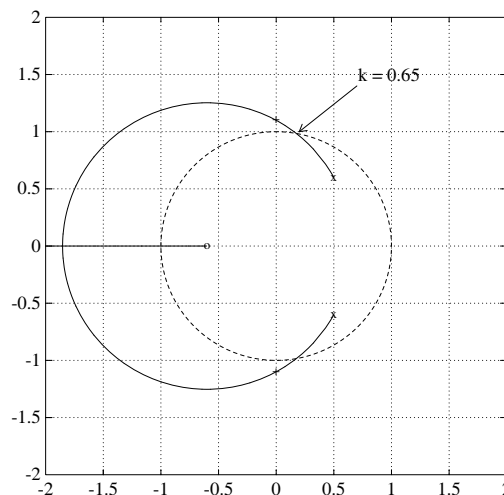
al variare del parametro k nell'intervallo $[0, +\infty]$

- Per il tracciamento del luogo valgono le stesse regole del caso continuo
- Cambia l'interpretazione dei risultati che si ottengono

- Esempio. Dato il seguente sistema in catena aperta con due poli in $z_{1,2} = 0.5 \pm j0.6$:

$$G(z) = k \frac{z + 0.6}{z^2 - z + 0.61}$$

Per il sistema in retroazione unitaria



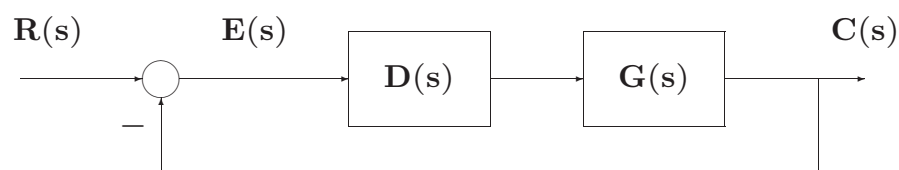
Lezione 11

Errori a Regime

- Specifiche di progetto di sistemi di controllo
- Specifiche che il sistema deve soddisfare, in condizioni **statiche** (o **di regime**) e durante i **transitori**:
 - **Precisione a regime**: ci si riferisce con questa alla capacità di un sistema di seguire alcuni segnali di riferimento con il minimo errore
 - **Risposta nel transitorio**: ci si riferisce all'andamento per tempi finiti dell'uscita del sistema in retroazione in risposta a segnali tipici in ingresso

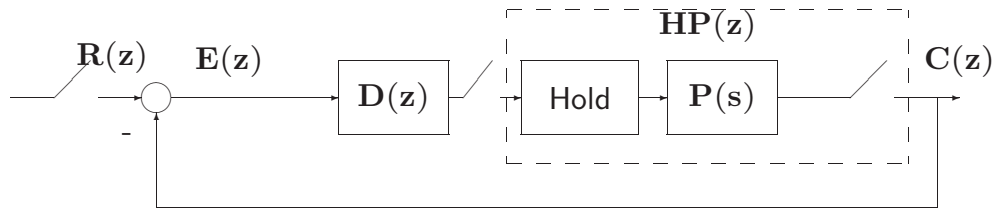
- **Stabilità relativa:** ci si riferisce ai margini di stabilità
- **Sensitività parametrica:** ci si riferisce al fatto che le prestazioni del sistema non vengano alterate dalle variazioni di certi parametri
- **Reiezione di disturbi:** cioè la capacità del sistema controllato di ridurre al minimo l'influenza sull'uscita di eventuali disturbi che entrano nell'anello di controllo
- **Sforzo di controllo:** ci si riferisce all'ampiezza massima della variabile manipolabile $v(t)$, o sull'energia entrante nel sistema

- Errori a regime (caso continuo)



$$G(s) = \frac{K(1 + q_1s)(1 + q_2s) \dots (1 + q_ms)}{s^N(1 + p_1s)(1 + p_2s) \dots (1 + p_ps)}$$

- Errori a regime (caso discreto)
- Nel caso discreto la corrispondente definizione di tipo si riferisce al numero di poli nel punto $z = 1$



$$G(z) = D(z)HP(z) = D(z)(1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{P(s)}{s}\right]$$

$$E(z) = \frac{1}{1 + G(z)}R(z)$$

- Assumendo che il sistema sia stabile, l'errore a regime può essere calcolato mediante il teorema del valore finale:

$$\begin{aligned} e_{\text{reg}} = \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) &= \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1})E(z)] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + G(z)} R(z) \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{z-1}{z} \frac{1}{1 + G(z)} R(z) \right] \end{aligned}$$

- Errore di posizione

$$\mathbf{R}(z) = \frac{r_0}{1 - z^{-1}}$$

$$e_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + G(z)} \frac{r_0}{1 - z^{-1}} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{r_0}{1 + G(z)} \right]$$

- Definendo $k_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)$ **costante di posizione**

$$e_p = \frac{r_0}{1 + k_p}$$

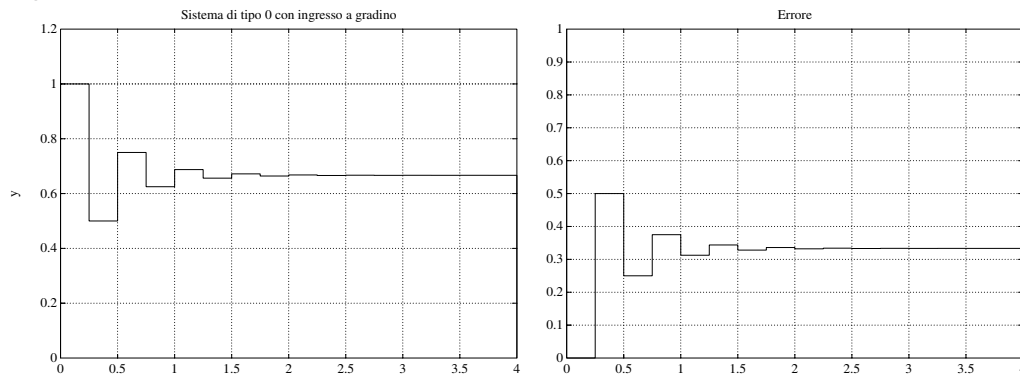
- Esempio

$$G(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}}$$

con $T = 0.25$ s

$$k_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = 2 \qquad e_p = \frac{1}{1+2} = 0.333$$

- Errore di posizione



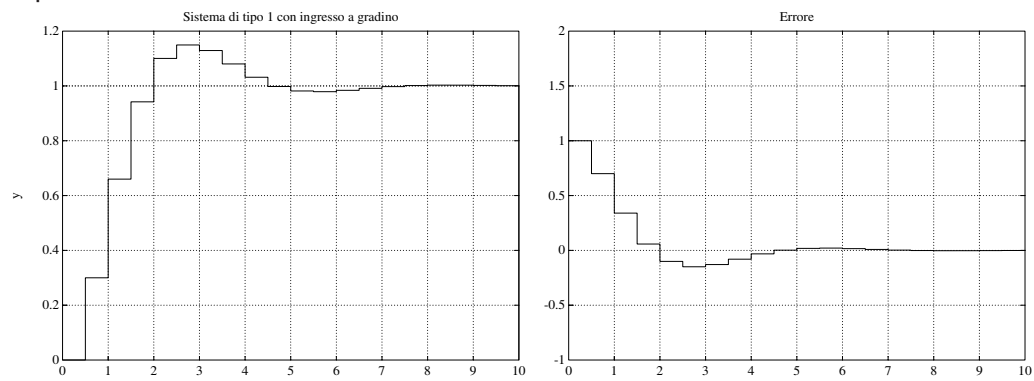
- Esempio

$$G(z) = \frac{0.3z^{-2}}{1 - 1.2z^{-1} + 0.2z^{-2}} = \frac{0.3z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.2z^{-1})}$$

con $T = 1$ s. Il sistema è ora di tipo 1

$$k_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \infty \quad e_p = 0$$

- Errore di posizione

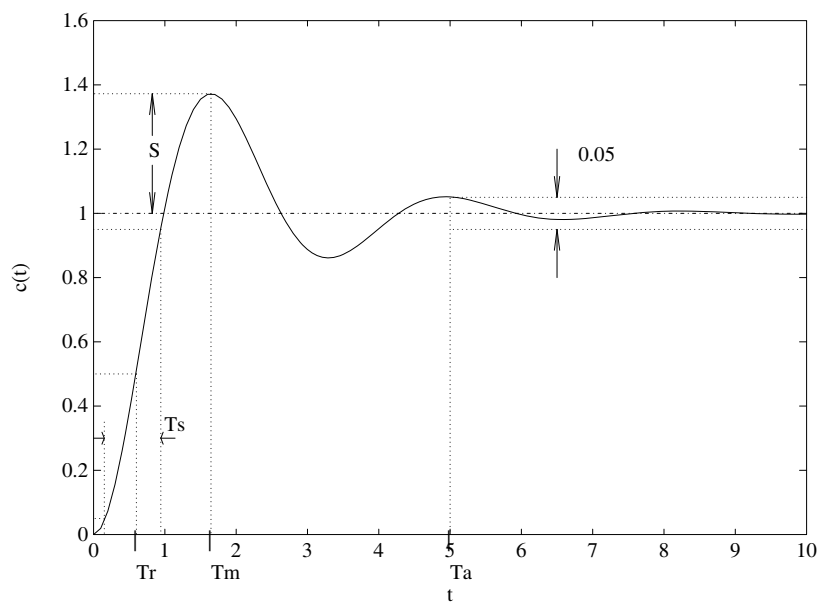


Lezione 12

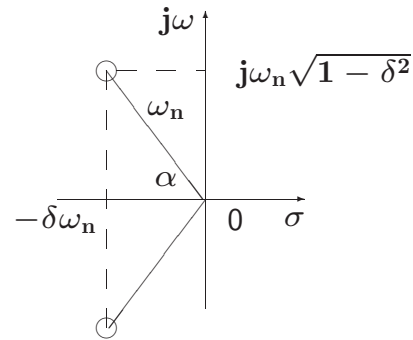
Specifiche nel Transitorio: Specifiche Frequenziali

- Specifiche sul transitorio
- Nel caso tempo-continuo, si definiscono le seguenti caratteristiche temporali della risposta a gradino:
 - **Tempo di salita T_s**
 - **Tempo di assestamento T_a**
 - **Tempo di ritardo T_r**
 - **Massimo sorpasso o massima sovraelongazione S**
 - **Istante di massima sovraelongazione T_m**

- Risposta di un sistema di secondo ordine



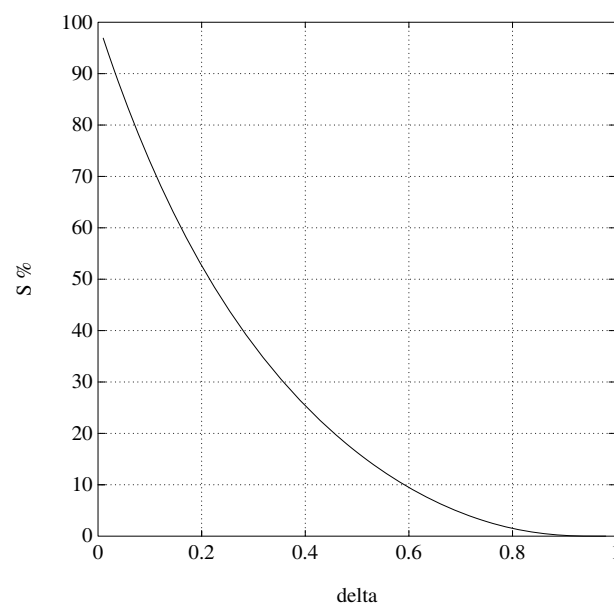
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$



- Tempo da 0 al 100% del V.F.: $T_1 = \frac{\pi - \arccos \delta}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}}$
- Istante di massimo sorpasso: $T_m = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}}$
- Tempo di assestamento: $T_a = \frac{3}{\delta\omega_n}$ (al 5 %), $T_a = \frac{4}{\delta\omega_n}$ (al 2 %)

- Massimo sorpasso percentuale:

$$S = 100[c(T_m) - 1] = 100 e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$



- Specifiche frequenziali
- **Margine di fase** M_F : detto $-\phi$ l'argomento di $G(e^{j\omega T})$ in corrispondenza della pulsazione ω_0 per la quale $|G(e^{j\omega_0 T})| = 1$, il margine di fase M_F è il complemento a π di ϕ , cioè

$$M_F = \pi - \phi$$

Tipici valori di specifica sono $45^\circ \div 60^\circ$

- **Margine di ampiezza** M_A : è l'inverso del guadagno di anello alla pulsazione ω' a cui corrisponde la fase π :

$$M_A = \frac{1}{|G(e^{j\omega' T})|}$$

dove $\arg\{G(e^{j\omega' T})\} = \pi$

Valori usuali di specifica per questo parametro sono 4-6 (12-16 db)

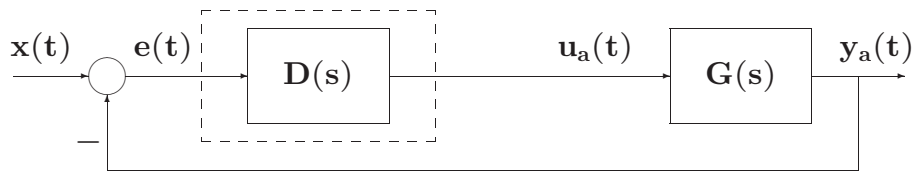
Lezione 13

Progetto per Discretizzazione del Controllore Analogico - I

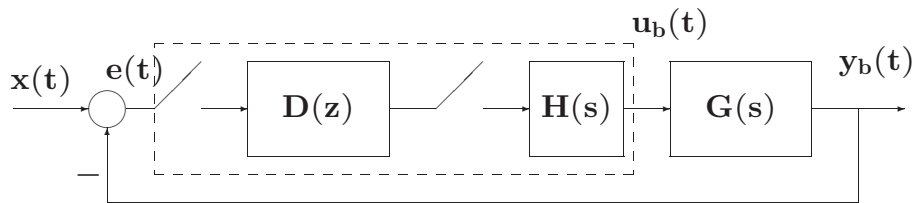
- **Tre classi di tecniche progettuali**

1. **Metodo indiretto** o per discretizzazione di un progetto analogico
2. **Metodo diretto** ossia nel dominio discreto:
 - progetto con il luogo delle radici
3. **Regolatori a struttura fissa** (tipo PID industriale)

- Metodo indiretto



(a)



(b)

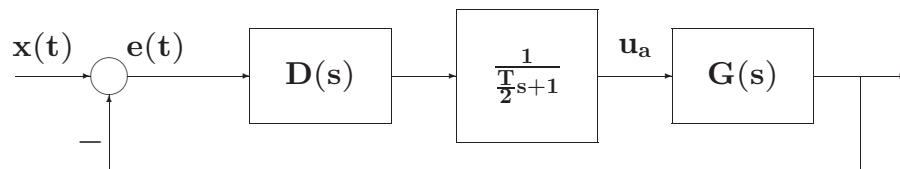
- T il più piccolo possibile !?

- Tre passi concettuali

1. Definizione di T e verifica dei margini di stabilità del sistema

$$H_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \approx \frac{T}{\frac{T}{2}s + 1}$$

$$H_0(s) \approx e^{-sT/2}$$



2. Discretizzazione della $D(s)$
3. Verifica a posteriori (simulativa e sperimentale) del comportamento dinamico

• Tecniche di discretizzazione:

1. Metodo delle differenze all'indietro (Eulero all'Indietro, EI)
2. Metodo delle differenze in avanti (Eulero in Avanti, EA)
3. Trasformazione bilineare (Tustin, TU)
4. Metodo della $\mathcal{Z}$ -trasformata con ricostruttore di ordine 0

- **Metodo delle differenze all'indietro (EI)**

$$D(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}}$$

- Esempio: $\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = ax(t)$

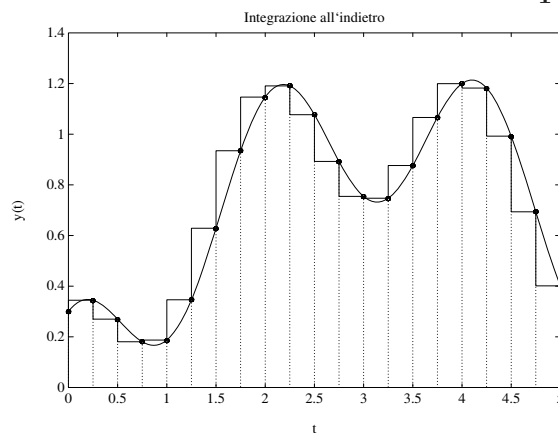
$$\int_0^t \frac{dy(t)}{dt} dt = -a \int_0^t y(t) dt + a \int_0^t x(t) dt$$

calcolando per $t = kT$, per $t = (k-1)T$ e sottraendo si ha

$$\begin{aligned} y(kT) - y((k-1)T) &= -a \int_{(k-1)T}^{kT} y(t) dt \\ &\quad + a \int_{(k-1)T}^{kT} x(t) dt \\ &\simeq -aT [y(kT) - x(kT)] \end{aligned}$$

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) - aT [Y(z) - X(z)]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) = \frac{aT}{1 - z^{-1} + aT} = \frac{a}{\frac{1-z^{-1}}{T} + a}$$



2. Metodo delle differenze in avanti (EA)

$$D(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T}}$$

- Esempio

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(t) dt \approx Ty((k-1)T)$$

$$\int_{(k-1)T}^{kT} x(t) dt \approx Tx((k-1)T)$$

$$y(kT) = y((k-1)T) - aT [y((k-1)T) - x((k-1)T)]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = G(z) = \frac{aTz^{-1}}{1 - (1 - aT)z^{-1}} = \frac{a}{\frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}} + a}$$

3. Trasformazione bilineare (TU)

$$D(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

- detta anche **integrazione trapezoidale** (o di di Tustin)

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(t) dt \approx \frac{[y(kT) + y((k-1)T)]T}{2}$$

$$\int_{(k-1)T}^{kT} x(t) dt \approx \frac{[x(kT) + x((k-1)T)]T}{2}$$

Lezione 14

Progetto per Discretizzazione del Controllore Analogico - II

Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1E, I-44123, Ferrara, Italia

Sistemi di Controllo Digitale

6. **Metodo della $\mathcal{Z}$ -trasformata con ricostruttore di ordine 0** o dell'invarianza alla risposta al gradino

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[D(z) \frac{1}{1 - z^{-1}} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[D(s) \frac{1}{s} \right] \Big|_{t=kT}$$

$$D(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{D(s)}{s} \right] = \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} D(s) \right]$$

- Possibilità di aliasing
- Da $D(s)$ stabili a $D(z)$ stabili

- Progetto di regolatori

$$D(z) = \frac{k_d(z - z_0)}{z - z_p}$$

che corrispondono a

$$D(s) = \frac{1 + s\tau_0}{1 + s\tau_p}$$

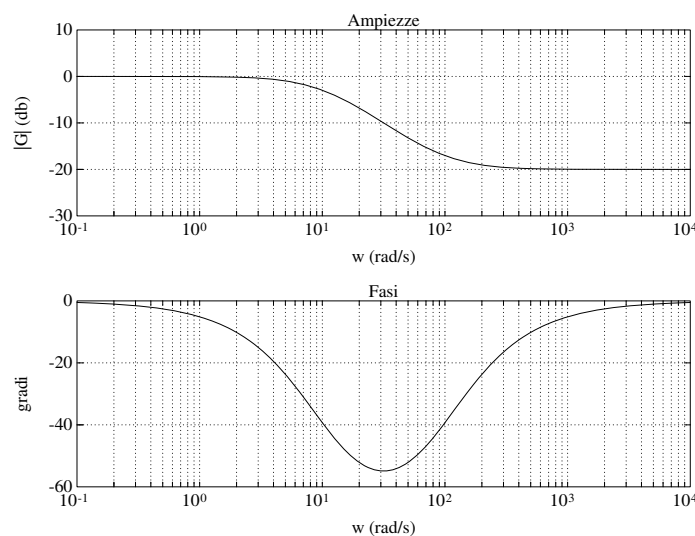
- Ad esempio, se si usa la trasformazione di Tustin: $D(z) = \left. \frac{1+s\tau_0}{1+s\tau_p} \right|_{s=\frac{2(z-1)}{T(z+1)}}$

$$D(z) = \frac{T + 2\tau_0}{T + 2\tau_p} \frac{z + \frac{T-2\tau_0}{T+2\tau_0}}{z + \frac{T-2\tau_p}{T+2\tau_p}}$$

$$k_d = \frac{T + 2\tau_0}{T + 2\tau_p}, \quad z_0 = \frac{2\tau_0 - T}{2\tau_0 + T}, \quad z_p = \frac{2\tau_p - T}{2\tau_p + T}$$

- Progetto di rete ritardatrice

$$D(w) = \frac{1 + s\tau_0}{1 + s\tau_p} \quad \frac{1}{\tau_p} < \frac{1}{\tau_0}$$



- $\tau_0 = 0.01 \text{ s}$, $\tau_p = 0.1 \text{ s}$

- Alle alte frequenze, il valore del guadagno è dato da

$$\alpha = \frac{\tau_0}{\tau_p} < 1$$

- Lo sfasamento massimo (in ritardo) è dato da

$$\Phi_m = -\arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

e si ottiene per la pulsazione

$$\Omega_m = \frac{1}{\sqrt{\tau_0 \tau_p}} = \frac{1}{\tau_p \sqrt{\alpha}}$$

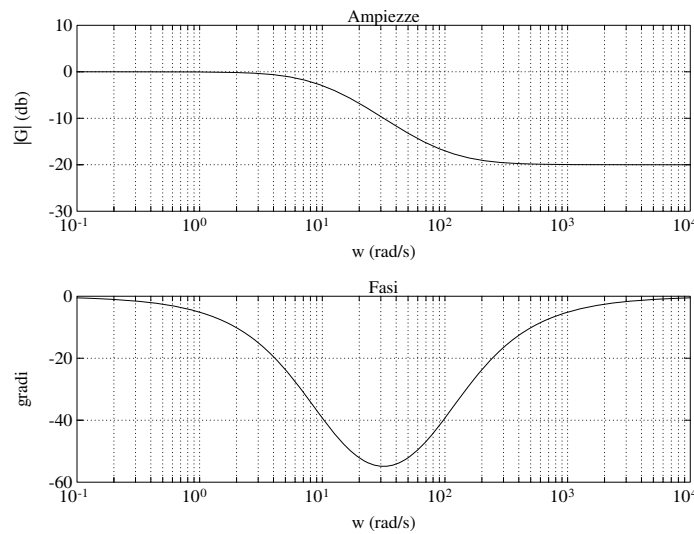
- Attenuazione alle alte frequenze (effetto positivo), sfasamento in ritardo (effetto negativo)

Lezione 15

Progetto di Reti Compensatrici - I

- Progetto di Rete Ritardatrice

$$D(w) = \frac{1 + s \tau_0}{1 + s \tau_p} \quad \frac{1}{\tau_p} < \frac{1}{\tau_0}$$



- $\tau_0 = 0.01 \text{ s}, \tau_p = 0.1 \text{ s}$

- Il progetto si articola nei seguenti passi:

- Dai diagrammi di Bode del sistema $G(s)$, con guadagno modificato per soddisfare eventuali specifiche sull'errore a regime, si calcola la pulsazione Ω^* a cui corrisponde un margine di fase pari a quello desiderato (M_F) aumentato di 5° per compensare le approssimazioni introdotte nel procedimento:

$$\Omega^* : \quad \text{Arg}[G(j\Omega^*)] = -180^\circ + M_F + 5^\circ$$

- Poichè la rete deve far sì che a questa pulsazione il guadagno di anello diventi unitario, si impone che il fattore di attenuazione introdotto dalla rete correttiva sia

$$\frac{\tau_0}{\tau_p} = \alpha = \frac{1}{|G(j\Omega^*)|}$$

3. Si fissa

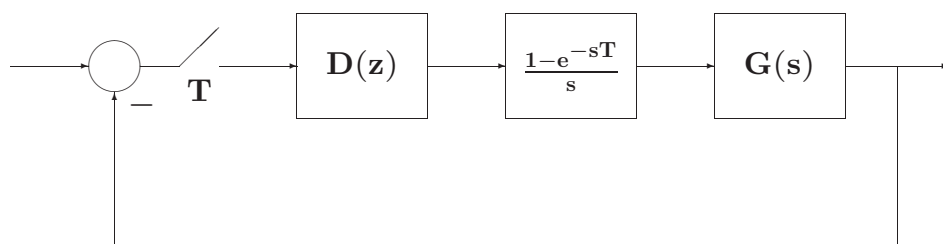
$$\frac{1}{\tau_0} = 0.1 \Omega^*$$

al fine di assicurarsi, come si è detto, che lo sfasamento in ritardo della rete non influisca in modo apprezzabile alla pulsazione di attraversamento

4. Si ricava

$$\tau_p = \frac{\tau_0}{\alpha}$$

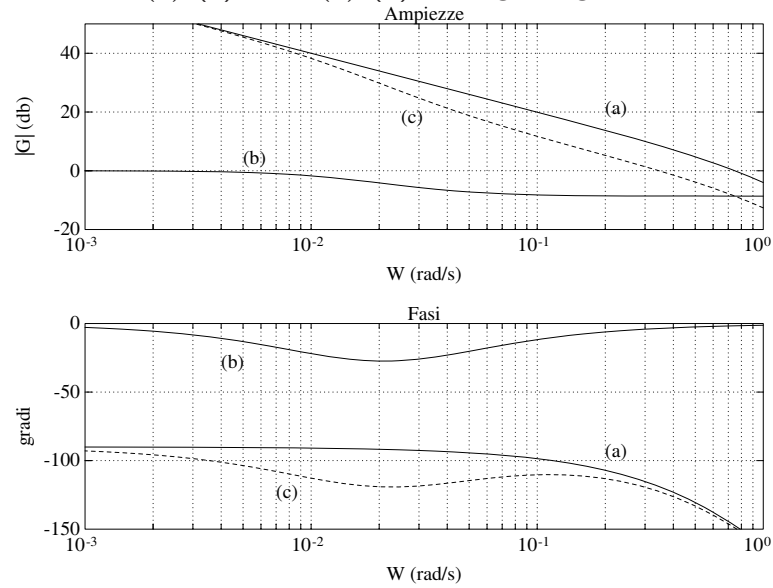
- Esempio



$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)}$$

- Progettare una rete digitale ritardatrice $D(z)$ che garantisca al sistema in retroazione un margine di fase $M_F = 55^\circ$
- $T = 0.1 \text{ s}$

- Diagrammi di Bode di $G(s)$ (a), di $D(s)$ (b) e del guadagno di anello $D(s)G(s)$ (c)



- La pulsazione cui corrisponde una fase di $-180 + 55 + 5 = -120^\circ$ è $\Omega^* \approx 0.3446 \text{ rad/s}$ a cui corrisponde un guadagno di

$$1/\alpha = 2.7039 = 8.64\text{db}$$

da cui

$$\tau_0 = \frac{1}{0.03446} = 29.0191$$

$$\tau_p = 2.7039 \cdot 29.0191 = 78.4649$$

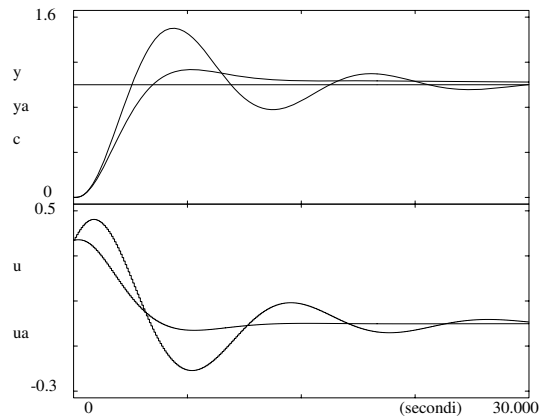
$$\Omega_0 = 0.03446$$

$$\Omega_p = 0.01274$$

- Effettuando la discretizzazione di $D(s)$

$$D(z) = \frac{0.37(z - 0.99656)}{(z - 0.9987)} = \frac{0.37z - 0.369}{(z - 0.9987)}$$

- Risposta a gradino del processo in retroazione e relative variabili di controllo con e senza troncamento numerico a 3 cifre dei parametri del regolatore

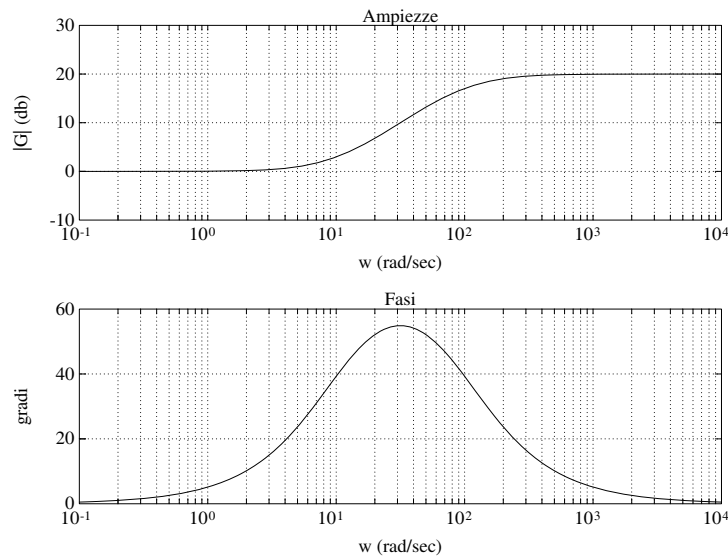


Note:

- Il polo e lo zero della rete ritardatrice sono molto prossimi tra loro ed entrambi nelle vicinanze del punto $z = 1 + j0$
- Il fenomeno è peraltro accentuato per T piccolo
- Il regolatore digitale deve essere realizzato con una notevole precisione numerica

- Progetto di Rete Anticipatrice

$$D(s) = \frac{1 + s \tau_0}{1 + s \tau_p} \quad \frac{1}{\tau_0} < \frac{1}{\tau_p}$$



- $\tau_p = 0.01 \text{ s}, \quad \tau_0 = 0.1 \text{ s}$

Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1E, I-44123, Ferrara, Italia

Sistemi di Controllo Digitale

- Il guadagno della rete per alte frequenze è

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\tau_0}{\tau_p} > 1$$

- Lo sfasamento massimo in anticipo è

$$\Phi_m = \arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

ottenuto alla pulsazione

$$\Omega_m = \frac{1}{\sqrt{\tau_0 \tau_p}} = \frac{1}{\tau_0 \sqrt{\alpha}}$$

- Sfasamento in anticipo (effetto positivo), aumento di guadagno (effetto negativo)

- Progetto con specifica di margine di fase M_F :

1. Dai diagrammi di Bode della $G(w)$, nella quale si è considerato il guadagno opportuno per soddisfare le specifiche sull'errore a regime, si individua il margine di fase del sistema
2. Si calcola l'anticipo di fase Φ_m necessario per avere un margine di fase pari a quello M_F desiderato, maggiorato di $5^\circ \div 10^\circ$ per compensare le approssimazioni di progetto
3. Una volta noto Φ_m , si calcola

$$\alpha = \frac{1 - \sin \Phi_m}{1 + \sin \Phi_m}$$

4. Si determina la pulsazione Ω^* per la quale l'ampiezza di $G(w)$ vale $\alpha/2$. Poichè la rete aumenta il guadagno del sistema alle alte frequenze, si fa corrispondere la nuova pulsazione Ω^* alla Ω_m della rete anticipatrice

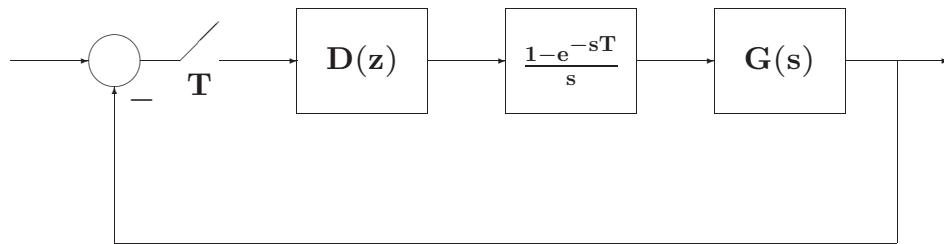
5. Dalle due relazioni

$$\alpha = \frac{\tau_p}{\tau_0}, \quad \Omega^* = \Omega_m = \frac{1}{\tau_0 \sqrt{\alpha}}$$

si ricavano le due costanti di tempo τ_0, τ_p

6. Se le prestazioni risultanti non sono quelle desiderate, si ripete il procedimento fissando Φ_m ad un valore superiore. Può risultare conveniente considerare come valori di Ω_m per la rete una pulsazione diversa (solitamente inferiore)

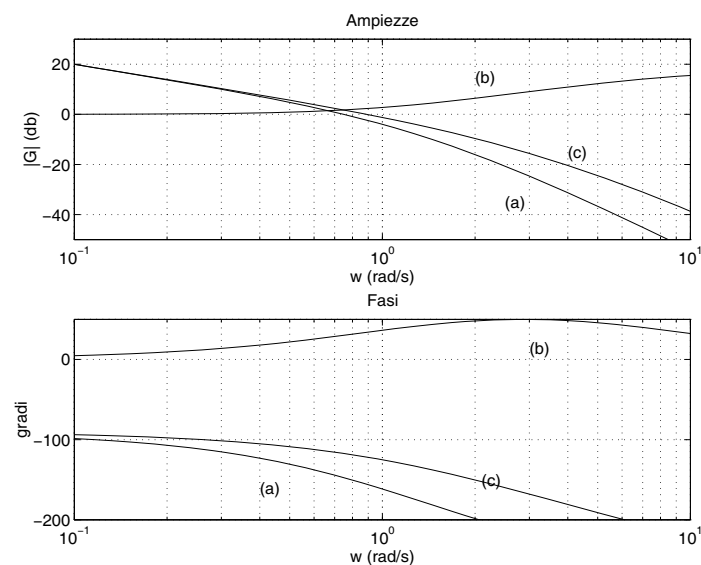
- Esempio



$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)}$$

- Progettare una rete anticipatrice digitale $D(z)$ che garantisca al sistema in retroazione un margine di fase $M_F = 55^\circ$
- $T = 0.1$ s

- Diagrammi di Bode di $G(s)$ (a), di $D(s)$ (b) e del guadagno di anello $D(s)G(s)$ (c)



- Margine di fase pari a circa 30° , per una pulsazione di 0.75 rad/s

- Primo tentativo: si progetta una rete che introduce uno sfasamento $\Phi_m = 35^\circ$. Si ottiene

$$\alpha = 0.271, \quad \Omega^* = 2.16 \text{ rad/s}$$

$$\tau_p = 0.241 \text{ s}, \quad \tau_0 = 0.8893 \text{ s}$$

- Il margine di fase di $D(w)G(w)$ è di 49°
- Anche variando Ω_m non si riesce ad ottenere la specifica di fase
- Si ricomincia con $\Phi_m = 45^\circ$ e si ottiene

$$\alpha = 0.1715, \quad \Omega^* = 2.61 \text{ rad/s}$$

$$\tau_p = 0.1587 \text{ s}, \quad \tau_0 = 0.9252 \text{ s}$$

e un margine di fase complessivo di 53°

- Ridefinendo $\Omega^* = 2.2 \text{ rad/s}$ si ottiene

$$D(s) = \frac{1 + 1.0973s}{1 + 0.1883s}$$

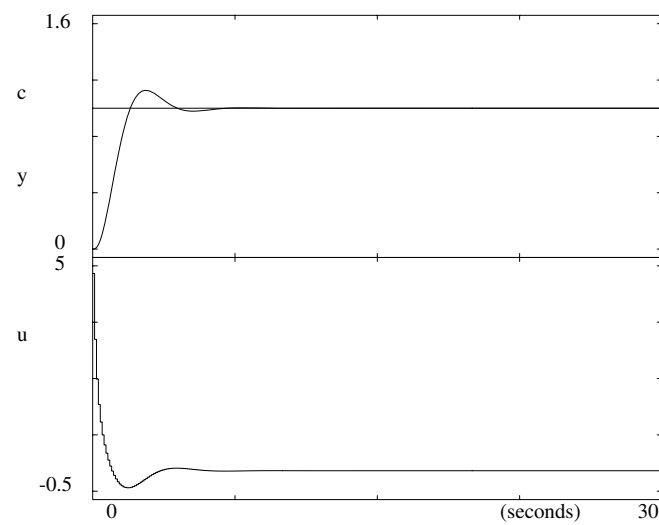
che fornisce il margine prescritto $M_F = 55^\circ$

- Discretizzando

$$D(z) = \frac{4.8146(z - 0.9129)}{z - 0.5803}$$

- Si nota che nel caso della rete anticipatrice non ci sono problemi numerici sulla precisione dei parametri

- Risposta a gradino del processo in retroazione e relativa variabile di controllo



Lezione 16

Progetto di Reti Compensatrici - II

• Progetto mediante il luogo delle radici

- Equazione caratteristica del sistema in anello chiuso

$$1 + k G_0(z) = 0$$

- k è il parametro di interesse che si fa variare tra 0 e $+\infty$
- Solitamente k rappresenta il guadagno

Esempio di Progetto

- Nell'anello digitale sia

$$G(s) = \frac{0.1}{s(s + 0.1)}$$

con $T = 1$ s. Per cui

$$G(z) = 0.0484 \frac{z + 0.9672}{(z - 1)(z - 0.9048)}$$

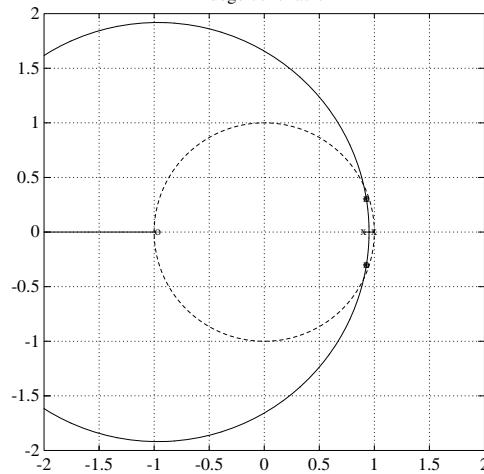
Le specifiche di progetto sul sistema in catena chiusa sono:

$$S\% \leq 16, \quad T_a \leq 6 \text{ s}$$

- Dalla specifica sul sorpasso si ha $\delta = 0.5$. Assumendo $D(z) = k$, l'equazione caratteristica diventa

$$1 + 0.0484k \frac{z + 0.9672}{(z - 1)(z - 0.9048)} = 0$$

Luogo delle radici



- Nel caso tempo continuo, le specifiche su $S\%$ e T_a implicano che la coppia di poli dominanti del sistema in anello chiuso sia

$$s = -0.5 \pm j0.867 \quad (\delta = 0.5, \omega_n = 1)$$

e nel caso tempo discreto effettuando la trasformazione $z = e^{sT}$

$$z = 0.393 \pm j0.462$$

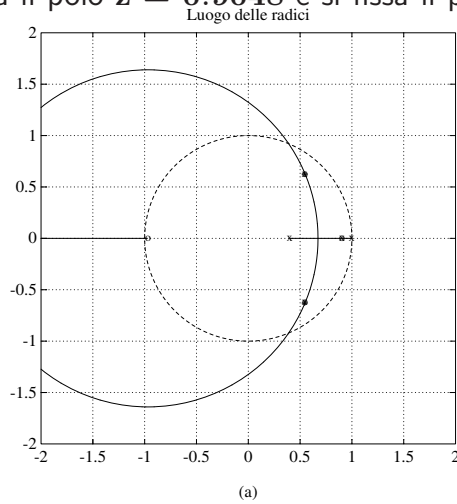
- Nel piano z i poli del sistema in retroazione devono essere:
 - interni al cerchio di raggio $r = e^{-\delta\omega_n} = 0.6065$
 - entro la zona delimitata dal luogo a spirale logaritmica per $\delta = 0.5$

- Non sono soddisfatte le specifiche su $S\%$ e su T_a
- Per $K > 2$ il sistema è instabile

- Si introduce un regolatore dinamico

$$D(z) = k \frac{z - z_0}{z - z_p}$$

- Primo tentativo: z_0 cancella il polo $z = 0.9048$ e si fissa il polo del regolatore a sinistra, per esempio $z_p = 0.4$



- I poli si posizionano in

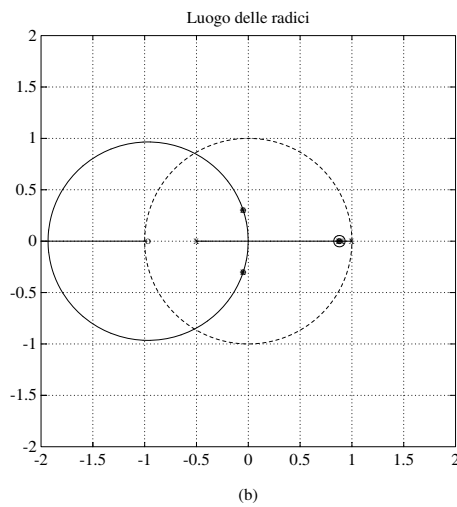
$$z = 0.5476 \pm j0.6284$$

per cui $\delta = 0.21$ e quindi non è soddisfatta la specifica sul transitorio

- Nuovo tentativo:

$$z_0 = 0.88$$

in modo che in questa zona lo sviluppo del luogo delle radici all'esterno dell'asse reale sia modesto, e il polo in $z = -0.5$



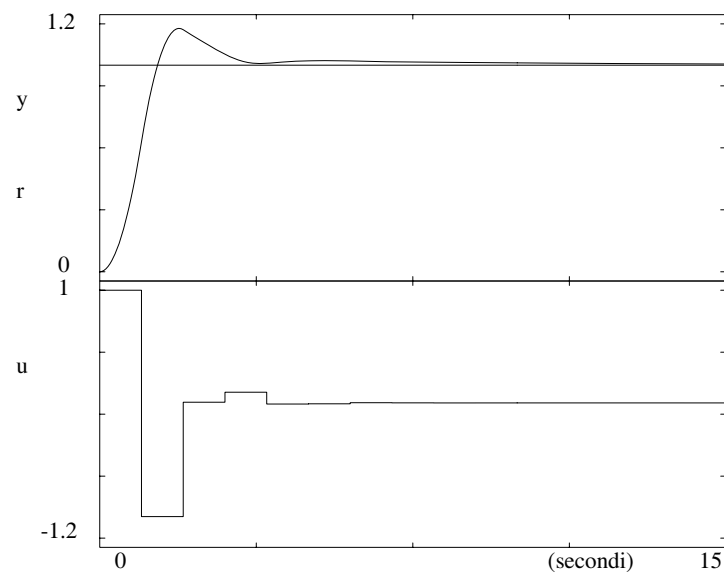
- Se si sceglie $k = 13$ per cui

$$z = -0.04986 \pm j0.3035, \quad z = 0.8757$$

- Il regolatore finale è

$$D(z) = 13 \frac{z - 0.88}{z + 0.5}$$

- Verifica simulativa



Lezione 17

Regolatori Standard PID Digitali - I

Regolatori standard

- Struttura fissa tipo PID
- Tuning dei parametri
- Scelta del periodo di campionamento T
- Discretizzazione algoritmi analogici
ed inoltre . . .
- Tuning automatico dei parametri

Discretizzazione del classico regolatore PID analogico

$$U(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) E(s)$$

- Usando l'integrazione rettangolare

- Forma di posizione:

$$u_n = K_p \left[e_n + \frac{T}{T_i} \sum_{k=0}^n e_k + \frac{T_d}{T} (e_n - e_{n-1}) \right] + M_R$$

- Una forma di algoritmo particolarmente utilizzata in pratica

- Termine derivativo:

$$\frac{T_d s}{1 + T_d s/N} \quad N \text{ tra } 3 \text{ e } 10$$

- Parte integrale: “differenza in avanti”

- Parte derivativa: “differenza all’indietro”

$$D_{PID}(z) = K_p \left[1 + \frac{T}{T_i(z-1)} + \frac{T_d}{T+T_d/N} \frac{z-1}{[z-T_d/(NT+T_d)]} \right]$$

Tuning dei parametri

- Due categorie di criteri

a) Quelli che utilizzano alcuni punti caratteristici della risposta $y(t)$ per imporre l'andamento transitorio desiderato.

b) Criteri di tipo integrale

$$ISE = \int_0^\infty [e(t)]^2 dt$$

$$IAE = \int_0^\infty |e(t)| dt$$

$$ITAE = \int_0^\infty t |e(t)| dt$$

- Nel caso analogico

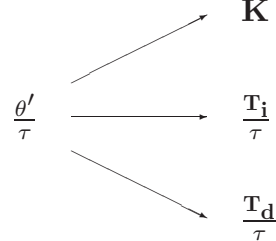
Controllore	Ziegler-Nichols	Cohen-Coon	3C
P	$K K_p = (\theta/\tau)^{-1}$	$K K_p = (\theta/\tau)^{-1} + 0.333$	$K K_p = 1.208(\theta/\tau)^{-0.956}$
PI	$K K_p = 0.9(\theta/\tau)^{-1}$ $T_i/\tau = 3.33(\theta/\tau)$	$K K_p = 0.9(\theta/\tau)^{-1} + 0.082$ $T_i/\tau = \frac{3.33(\theta/\tau)[1+(\theta/\tau)/11]}{1+2.2(\theta/\tau)}$	$K K_p = 0.928(\theta/\tau)^{-0.946}$ $T_i/\tau = 0.928(\theta/\tau)^{0.583}$
PID	$K K_p = 1.2(\theta/\tau)^{-1}$ $T_i/\tau = 2(\theta/\tau)$ $T_d/\tau = 0.5(\theta/\tau)$	$K K_p = 1.35(\theta/\tau)^{-1} + 0.27$ $T_i/\tau = \frac{2.5(\theta/\tau)[1+(\theta/\tau)/5]}{1+0.6(\theta/\tau)}$ $T_d/\tau = \frac{0.37(\theta/\tau)}{1+0.2(\theta/\tau)}$	$K K_p = 1.37(\theta/\tau)^{-0.95}$ $T_i/\tau = 0.74(\theta/\tau)^{0.738}$ $T_d/\tau = 0.365(\theta/\tau)^{0.95}$

- Modello del sistema

$$G_p(s) = K \frac{e^{-\theta s}}{1 + \tau s}$$

- Approssimazione del campionatore e del ricostruttore di ordine zero con un ritardo pari a $T/2$

$$\theta' = \theta + \frac{T}{2}$$



e quindi si ricavano K_p , T_i e T_d

- Esempio. Sistema da controllare:

$$G(s) = \frac{1}{(0.5s + 1)(s + 1)^2(2s + 1)}$$

- Modello ($K = 1$, $\theta = 1.46$ s, $\tau = 3.34$ s)

$$G_m(s) = \frac{e^{-1.46s}}{1 + 3.34s}$$

- Progettare un regolatore PID in corrispondenza a $\delta = 0.25$
- Sia $T = 0.3$ s

- $\theta' = \theta + T/2 = 1.46 + 0.15 = 1.61$
- $\theta'/\tau = 0.482$
- Dalla tabella di Ziegler-Nichols si ha

$$K K_p = 2.4894 \quad \frac{T_i}{\tau} = 0.9641 \quad \frac{T_d}{\tau} = 0.241$$

da cui si ottengono i parametri

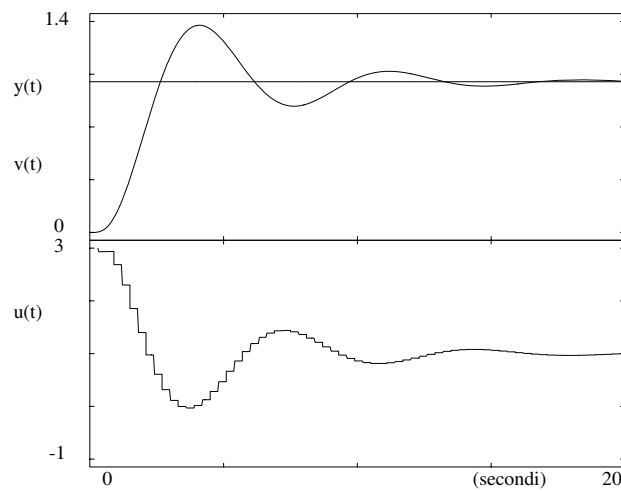
$$K_p = 2.4894$$

$$T_i = 0.9641\tau = 3.22$$

$$T_d = 0.241\tau = 0.805$$

- Mediante discretizzazione rettangolare

$$D_{PID}(z) = K_p \left[1 + \frac{T}{T_i(1 - z^{-1})} + \frac{T_d}{T}(1 - z^{-1}) \right]$$

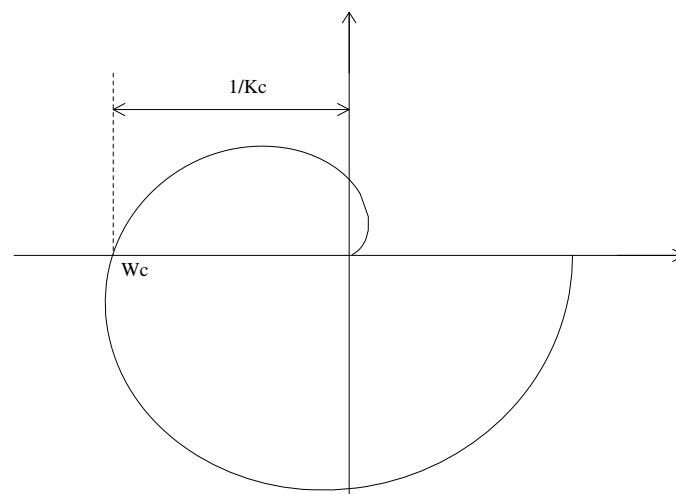


Lezione 18

Regolatori Standard PID Digitali - II

• Tuning automatico

- Un semplice metodo è quello basato sulla stima del guadagno critico K_c e del periodo di oscillazione critica $P_c = \frac{2\pi}{\omega_c}$



- Stimati K_c e P_c , si usa la tabella di Ziegler–Nichols

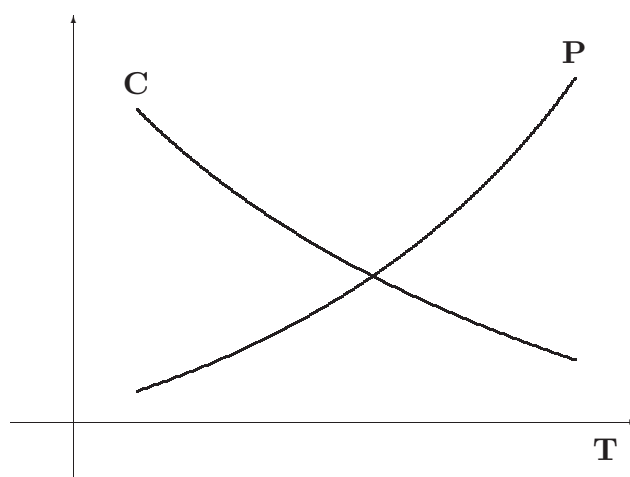
Tipo	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_c$	∞	0
PI	$0.45K_c$	$P_c/1.2$	0
PID	$0.6K_c$	$0.5P_c$	$0.125P_c$

Lezione 19**Considerazioni Conclusive**

Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1E, I-44123, Ferrara, Italia

Sistemi di Controllo Digitale

- **Considerazioni riassuntive sulla scelta del periodo di campionamento**



- C: Costo
- P: Prestazione
- T: Tempo di campionamento

Università di Ferrara, Dip. di Ingegneria
v. Saragat, 1E, I-44123, Ferrara, Italia

Sistemi di Controllo Digitale

- Prestazioni
 - reiezione dei disturbi
 - inseguimento del set-point
 - energia di controllo
 - ritardi e stabilità
 - robustezza alle variazioni parametriche
- Costo
 - sfruttamento della capacità elaborativa
 - velocità di conversione
 - velocità di elaborazione
 - precisione nella memorizzazione dei parametri e delle variabili

- Gli effetti di T sulle prestazioni
 - gli effetti di destabilizzazione crescono al crescere di T ;
 - la perdita di informazione sui segnali cresce al crescere di T ;
 - l'accuratezza dell'algoritmo, ottenuto per discretizzazione, cresce al diminuire di T ;
 - gli effetti di quantizzazione crescono al diminuire di T .
- La miglior scelta è il valore di T più elevato che garantisca tutte le specifiche prestazionali fissate

- Regole pratiche per la scelta di T:

a)

$$T \leq \frac{\tau_{\text{dom}}}{10}$$

b)

$$T \ll \frac{T_a}{10} \rightarrow T = \frac{T_a}{100}$$

- Modello di un processo di tipo 0:

$$G_{01}(s) = k \frac{e^{-\theta s}}{1 + \tau s}$$

con k, θ, τ da determinare.

- Modelli più complessi. Con due poli reali:

$$G_{02}(s) = k \frac{e^{-\theta s}}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}$$

- Con due poli complessi coniugati:

$$G_{03}(s) = k \frac{e^{-\theta s} \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2}$$

- Con due poli ed uno zero:

$$G_{04}(s) = k \frac{e^{-\theta s} (1 + s/\alpha)}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}$$

- Modello del primo ordine:

$$G_{01}(s) = k \frac{e^{-\theta s}}{1 + \tau s}$$

