

TECNICHE DI CONTROLLO

Richiami di Teoria dei Sistemi

Dott. Ing. SIMANI SILVIO

con supporto del
Dott. Ing. BONFE' MARCELLO

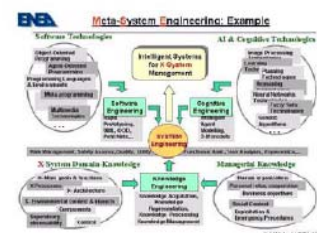
Tecniche di Controllo – Intro



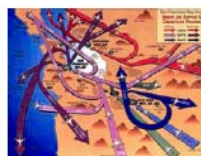
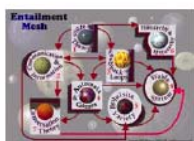
Sistemi e Modelli

Da diversi anni, i termini:

- "Sistema",
- "Teoria dei Sistemi",
- "Ingegneria dei Sistemi"
- ...



sono divenuti di uso corrente in campi e discipline anche molto diverse:
controllo dei processi, elaborazione dati, biologia, economia, ecologia,
gestione aziendale, gestione traffico, ...



Sistema: "elemento" comune in questa terminologia

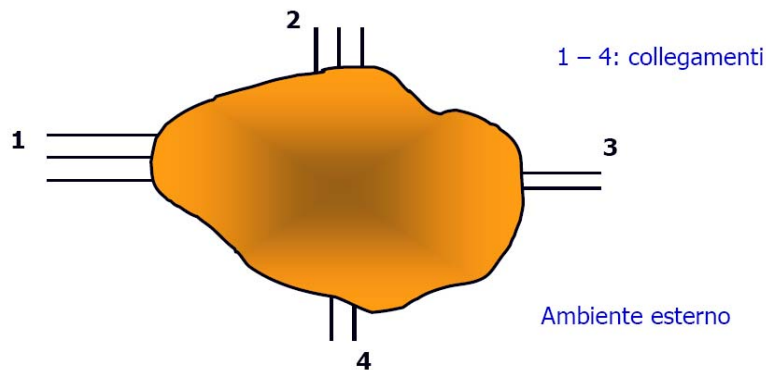
➔ Necessità di definire e studiare le **proprietà strutturali** dei "sistemi"

Tecniche di Controllo – Intro



Concetto di Sistema

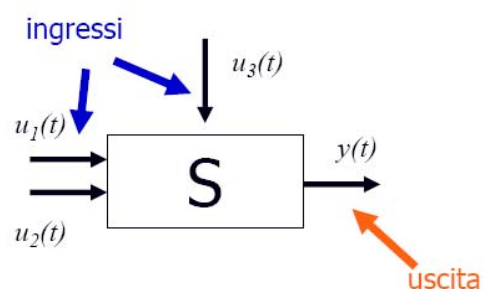
- ➡ **Sistema:** insieme, artificialmente isolato dal contesto, costituito da più parti tra loro interagenti di cui si vuole indagare il comportamento
- ➡ **Attributo misurabile:** caratteristica che può essere messa in relazione con un insieme di simboli o numeri (interi, reali, complessi)
- ➡ **Modello matematico:** equazioni che descrivono le relazioni tra gli attributi misurabili.



Causa → Effetto

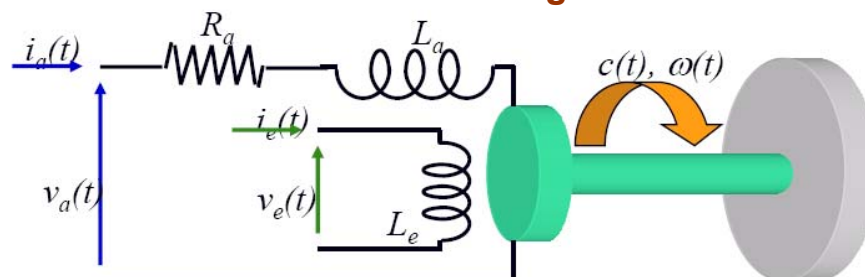
- Un sistema *orientato* è un sistema in cui le variabili sono suddivise in

- Variabili di **ingresso** (cause)
- Variabili di **uscita** (effetti)



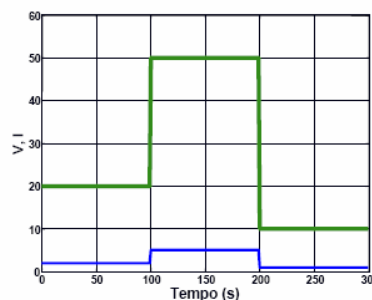
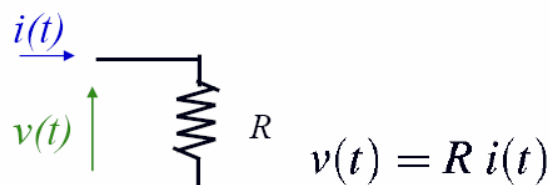
- Non sempre la suddivisione tra ingressi ed uscite (cause ed effetti) è univoca

Es.: Motore.. o generatore?

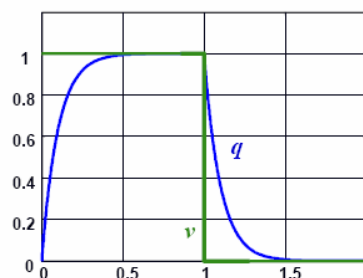
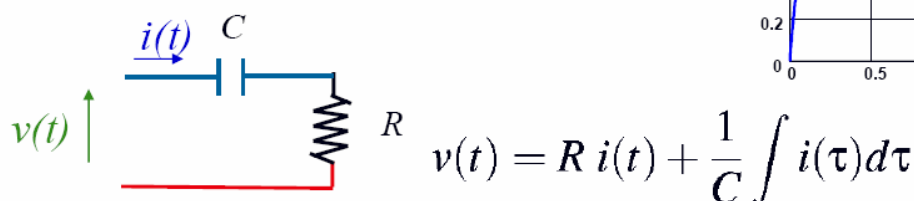


Sistemi e Dinamica

■ Sistema statico (algebrico)

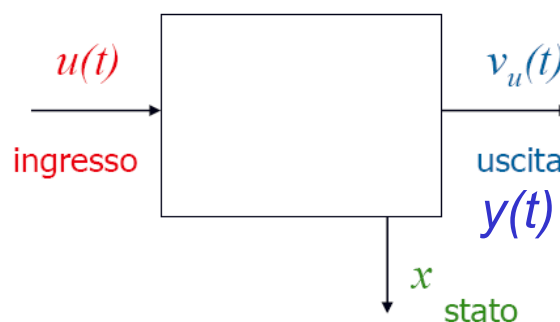
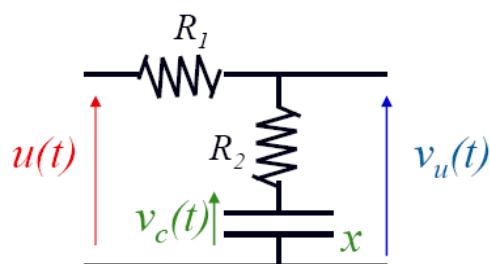


■ Sistema dinamico



Sistemi e Dinamica

- **Sistemi dinamici:** dotati di memoria. I valori dell'uscita, in un dato istante, dipendono **anche** dalla evoluzione degli ingressi negli istanti precedenti (storia – memoria).
- *Rete elettrica con elementi che accumulano energia* (capacità e/o induttanze)



Considerazioni “energetiche”

- ➡ Lo **stato** è l’informazione sulla “situazione interna” di un sistema, necessaria per predire l’effetto della sua storia passata sul suo comportamento futuro.
- ➡ Lo **stato** nei sistemi fisici è determinato dall’**accumulo di energia** (quantità di moto, energia potenziale, carica elettrica, ecc.)
- ➡ La scelta delle variabili di stato per la modellazione matematica è comunque **arbitraria e non univoca!**



Considerazioni “energetiche”

- ➡ In ogni dominio fisico ci sono sempre **UNO o DUE** elementi che caratterizzano l’accumulo di energia
 - **Elettrico**: capacità (C) e induttanza (L)
 - **Meccanico traslante**: massa (M) e reciproco della rigidità (1/K)
 - **Meccanico rotante**: momento di inerzia (J) e reciproco della rigidità torsionale (1/K)
 - **Fluidico**: capacità fluidica (Cf) e induttanza fluidica (Lf)
 - **Termico**: capacità termica (Ct)



Considerazioni “energetiche”

dominio	accumulo “capacitivo”	accumulo “induttivo”
elettrico	$E = \frac{1}{2} C v^2$	$E = \frac{1}{2} L i^2$
meccanico traslante	$E = \frac{1}{2} M v^2$	$E = \frac{1}{2} \frac{1}{K} f^2$
meccanico rotante	$E = \frac{1}{2} J \omega^2$	$E = \frac{1}{2} \frac{1}{K} c^2$
idraulico/pneumatico	$E = \frac{1}{2} C_f p^2$	$E = \frac{1}{2} L_f q^2$
termico	$E = C_t T$	manca
l'energia accumulata dipende dalle ➔ variabili ai morsetti variabili passanti		



Modelli matematici analitici: equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \\ \dots \\ y_p(t) = g_p(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \end{cases}$$



Modelli matematici analitici: equazioni differenziali

I vettori

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \dots \\ u_m(t) \end{pmatrix} \quad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \dots \\ y_p(t) \end{pmatrix}$$

sono, rispettivamente, i vettori di

- **Stato:** $x(t) \in \mathbf{X}, \mathbf{X}=\mathbb{R}^n$
- **Ingresso:** $u(t) \in \mathbf{U}, \mathbf{U}=\mathbb{R}^m$
- **Uscita:** $y(t) \in \mathbf{Y}, \mathbf{Y}=\mathbb{R}^p$

all'istante $t \in \mathbf{T}=\mathbb{R}$



Modelli matematici analitici: equazioni differenziali

Compattando la notazione, scriveremo le equazioni che rappresentano un sistema regolare come:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

dove $x(t)$, $u(t)$ e $y(t)$ sono vettori e f e g sono vettori di funzioni.

f è detta funzione di velocità di transizione dello stato

g è detta funzione di uscita

Il sistema descritto è di **dimensione n con m ingressi e p uscite**.



Tipologie di sistemi

Si possono distinguere, in base al numero di ingressi e di uscite, i seguenti tipi di sistema:

- **MIMO** (Multiple Input Multiple Output): sistema con m (>1) ingressi e p (>1) uscite
- **MISO** (Multiple Input Single Output): sistema con m (>1) ingressi e un'uscita sola ($p=1$)
- **SIMO** (Single Input Multiple Output): sistema con un solo ingresso ($m=1$) e p (>1) uscite
- **SISO** (Single Input Single Output): sistema con un solo ingresso ($m=1$) e una sola uscita ($p=1$)



Classificazione dei modelli

■ Lineare

Stazionario

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t) + D u(t)\end{aligned}$$

Non Stazionario

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)\end{aligned}$$

Con $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$
continue a tratti

■ Non lineare

Stazionario

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t))\end{aligned}$$

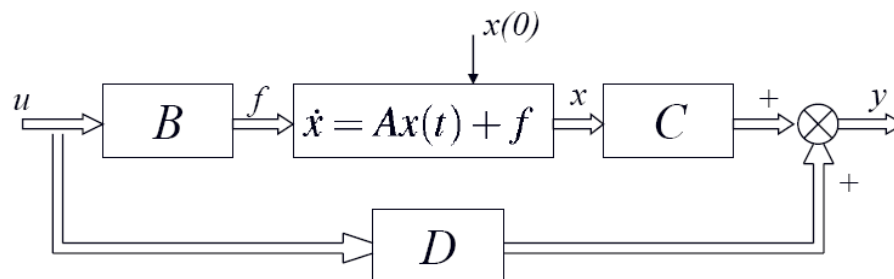
Non Stazionario

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= g(x(t), u(t), t)\end{aligned}$$



La classe di modelli più... “apprezzata”!

- Un sistema lineare stazionario (caso particolare) è rappresentato:
 - nel caso MIMO da 4 matrici (A, B, C, D)
 - nel caso SISO da (A, b, c, d).



u : ingresso; y : uscita; f : azione forzante; x : stato

A : matrice del sistema

B : matrice di distribuzione degli ingressi

C : matrice di distribuzione delle uscite

D : matrice del legame algebrico ingresso/uscita



La classe di modelli più... “apprezzata”!

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrice Quadrata

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \dots & c_{pn} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{p1} & \dots & d_{pm} \end{pmatrix}$$

NB: se il sistema è puramente dinamico $D = 0$



Rappresentazioni equivalenti

Introducendo il concetto di stato, abbiamo detto che **NON** esiste un modo unico di scegliere le variabili di stato per rappresentare un sistema dinamico.

Per un sistema LTI, una volta scelta una base per $\mathbf{X}=\mathbf{R}^n$, $\mathbf{U}=\mathbf{R}^m$ e $\mathbf{Y}=\mathbf{R}^p$ e scelte le variabili di stato, esso è rappresentato da:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Consideriamo una matrice $n \times n$ T costante e non singolare e mediante un *cambio di variabili* definiamo un nuovo vettore di stato z come:

$$z = Tx \iff x = T^{-1}z$$



Rappresentazioni equivalenti

Sostituendo nelle equazioni di partenza si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \bar{A}z(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) = \bar{C}z(t) + \bar{D}u(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} \bar{A} = TAT^{-1} & \bar{B} = TB \\ \bar{C} = CT^{-1} & \bar{D} = D \end{matrix}$$

Il sistema LTI rappresentato da queste equazioni è *equivalente* al sistema LTI di partenza nel senso che per un ingresso $u(t)$, $t \geq 0$, e due stati iniziali legati dalla condizione

$$z_0 = Tx_0$$

Le funzioni dello stato $x(t)$ e $z(t)$ sono legate dalla relazione

$$z(t) = Tx(t) \quad \forall t \geq 0$$

e le uscite sono identiche.

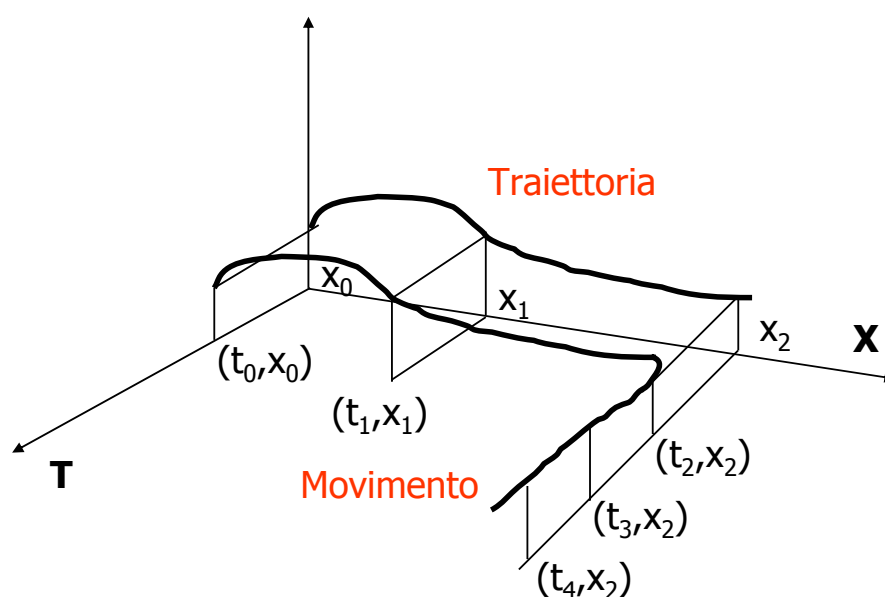


Analisi dei sistemi

- **Analisi del moto o della risposta:** soluzione delle equazioni differenziali per determinare il moto di x o la risposta di y , dato u .
- **Analisi della stabilità:** verifica di come le variazioni limitate sul valore iniziale di x e sulla funzione di u influenzino il moto di x o la risposta di y .
- **Analisi della controllabilità:** verifica delle possibilità di influire su x e y , agendo opportunamente su u
- **Analisi dell'osservabilità:** verifica delle possibilità di determinare x , note le funzioni di y e u



Movimento (o moto), traiettoria ed equilibrio



Perchè “apprezzare” i sistemi lineari stazionari (LTI)

- ➡ Per i sistemi lineari stazionari o Lineari Tempo-Invarianti (LTI) le analisi citate si effettuano con “semplici” risultati di algebra lineare
- ➡ Dato:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(0) = x_0$$

La soluzione dell'equazione è data dalla
formula di Lagrange :

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Moto libero + moto forzato

Inoltre, vale il principio della *sovrapposizione degli effetti*



Esponenziale di matrice

- ➡ La formula di Lagrange si basa sull'**esponenziale di matrice**, calcolabile come estensione della funzione esponenziale scalare (tramite espansione in serie):

$$e^{at} = \sum_{i=0}^{\infty} 1 + at + a^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + a^n \frac{t^n}{n!} + \dots \quad a \in \mathbb{R}$$

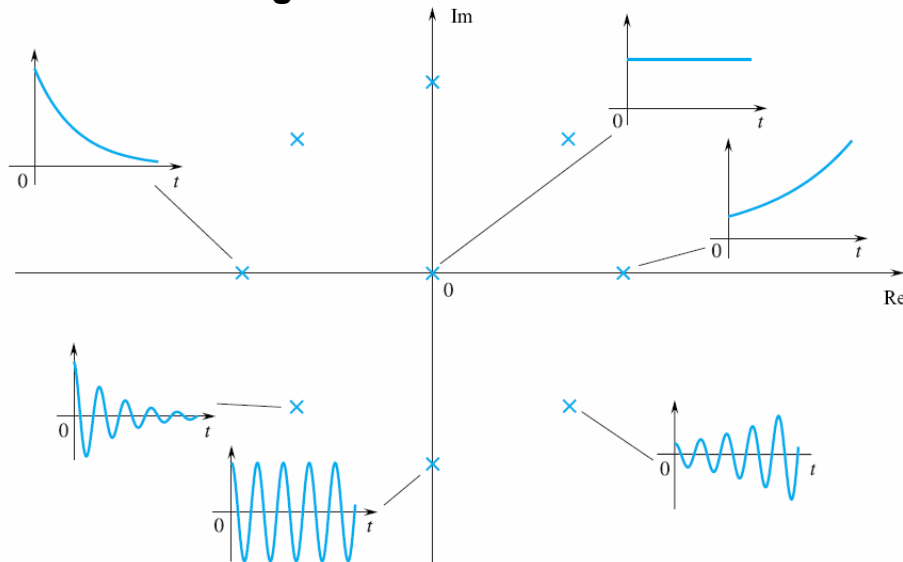
Analogamente, è possibile definire
l'esponenziale di una matrice come:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + A^n \frac{t^n}{n!} + \dots \quad A \text{ matrice quadrata}$$



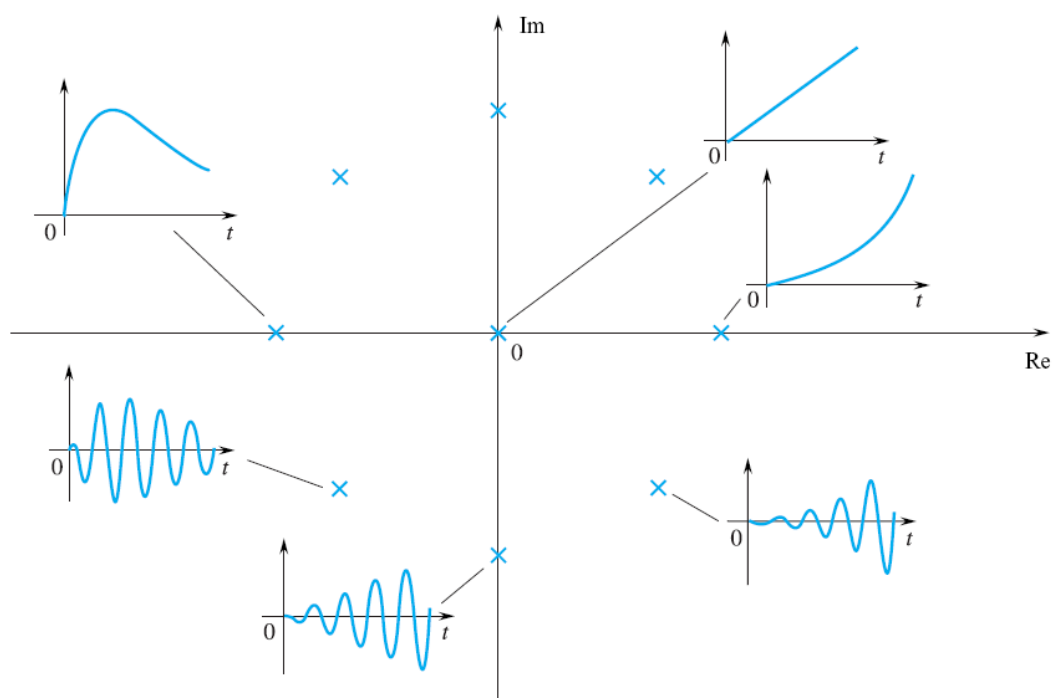
Esponenziale di matrice e *modi*

- ➡ I movimenti liberi e forzati sono combinazioni lineari di funzioni esponenziali di base, dette **modi**, il cui andamento dipende dagli **autovalori di A** e dalla loro **molteplicità**
- ➡ Es. con autovalori **singoli**



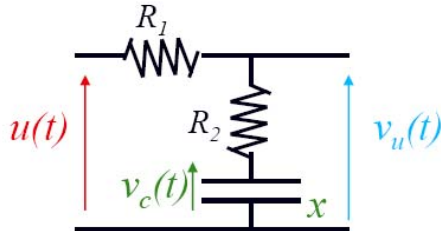
Esponenziale di matrice e *modi*

- ➡ Es. con autovalori **doppi**

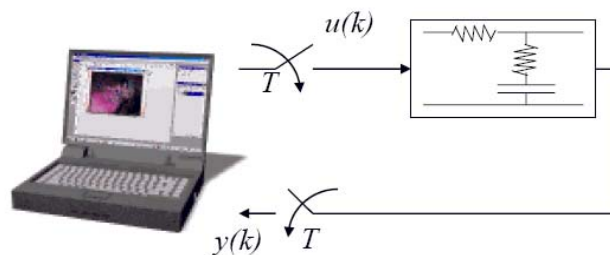


Sistemi a tempo discreto

- Si ottengono ad esempio (**MA NON SOLO**) quando un sistema a tempo continuo viene accoppiato ad un elaboratore digitale

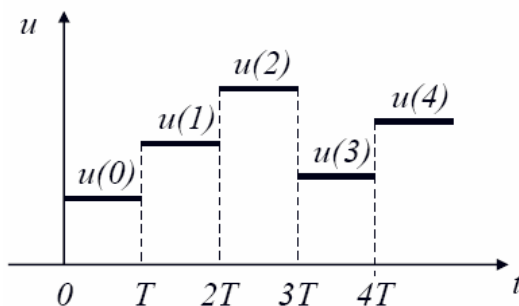


$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= cx(t) + du(t)\end{aligned}$$



Sistemi a tempo discreto

- Se si considera che all'ingresso venga applicata una funzione costante a tratti e che l'uscita venga campionata negli stessi istanti kT in cui l'ingresso varia



$$\begin{aligned}x(k+1) &= a_d x(k) + b_d u(k) \\ y(k) &= c_d x(k) + d_d u(k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_d &= e^{aT}; & b_d &= \int_0^T e^{a(T-\tau)} b d\tau \\ c_d &= c; & d_d &= d\end{aligned}$$



Sistemi a tempo discreto

- In generale, comunque si arrivi al modello MIMO

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k)$$

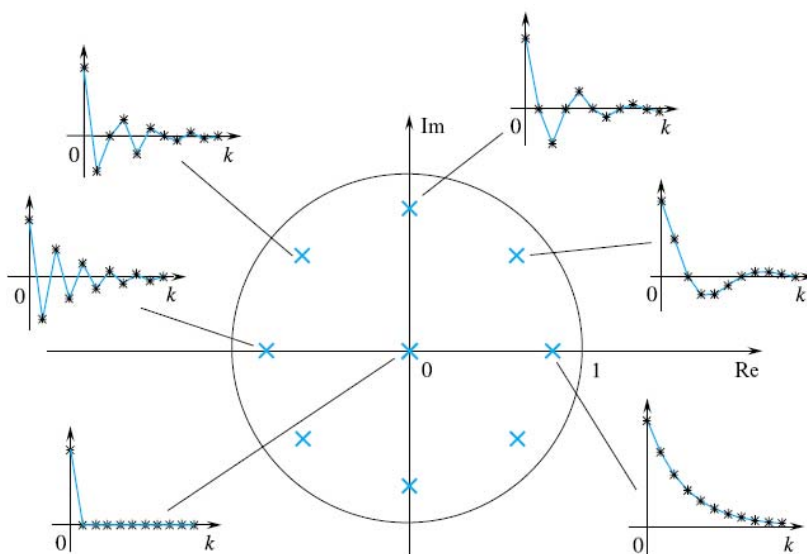
il movimento si può calcolare direttamente e in modo ancora più intuitivo:

$$x(k) = A_d^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A_d^{k-1-i} B_d u(i)$$



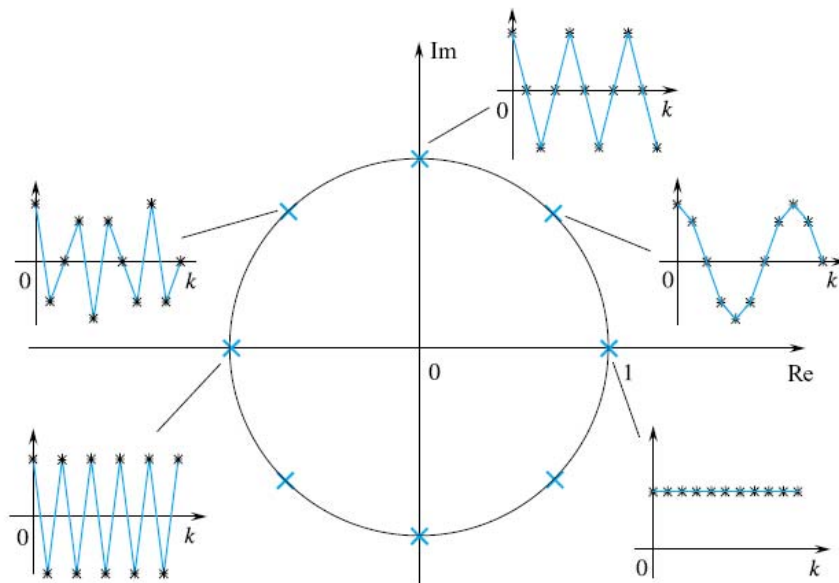
Sistemi a tempo discreto e modi

- Sempre in funzione degli **autovalori di A**, ma... è diversa la relazione con la collocazione sul piano complesso, rispetto al tempo continuo
- Es. con autovalori **singoli** ($|\lambda_i| < 1$)



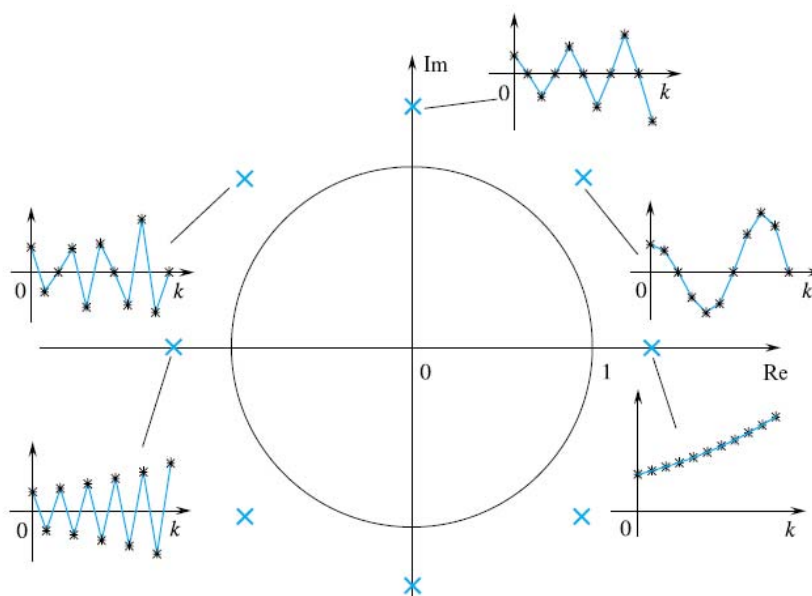
Sistemi a tempo discreto e modi

➡ Es. con autovalori **singoli** ($|\lambda_i| = 1$)



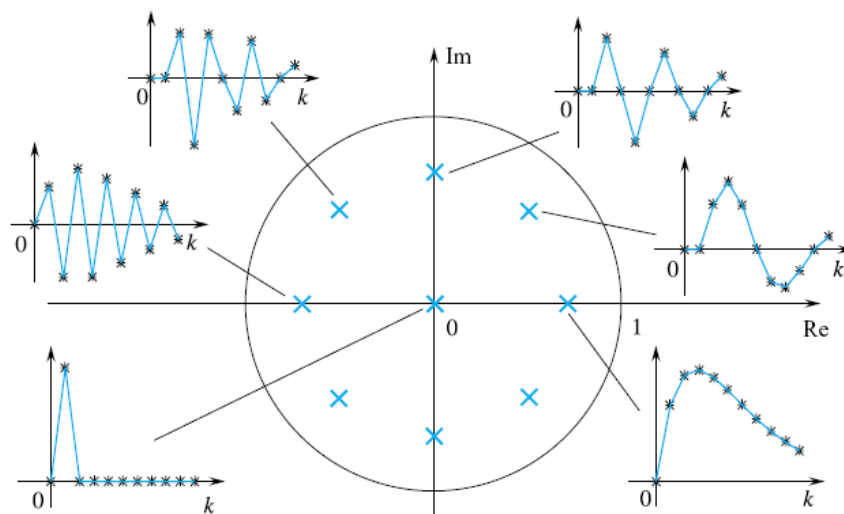
Sistemi a tempo discreto e modi

➡ Es. con autovalori **singoli** ($|\lambda_i| > 1$)



Sistemi a tempo discreto e modi

- ➡ Es. con autovalori **doppi** ($|\lambda_i| < 1$)



Stabilità

- ➡ In generale, si analizza la **stabilità dei punti di equilibrio e/o dei movimenti** di un sistema dinamico

- ➡ **[DEF.]** Un movimento

$$(t, x(t)) = (t, \phi(t, \bar{t}_0, \bar{x}(\bar{t}_0), \bar{u}(\cdot)))$$

si dice **semplicemente stabile** se $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x(t_0)$ che soddisfa la

$$\|x(\bar{t}_0) - \bar{x}(\bar{t}_0)\| < \delta$$

si ha $\|\phi(t, \bar{t}_0, \bar{x}(\bar{t}_0), \bar{u}(\cdot)) - \phi(t, \bar{t}_0, x(\bar{t}_0), \bar{u}(\cdot))\| < \varepsilon \quad \forall t \geq \bar{t}_0$

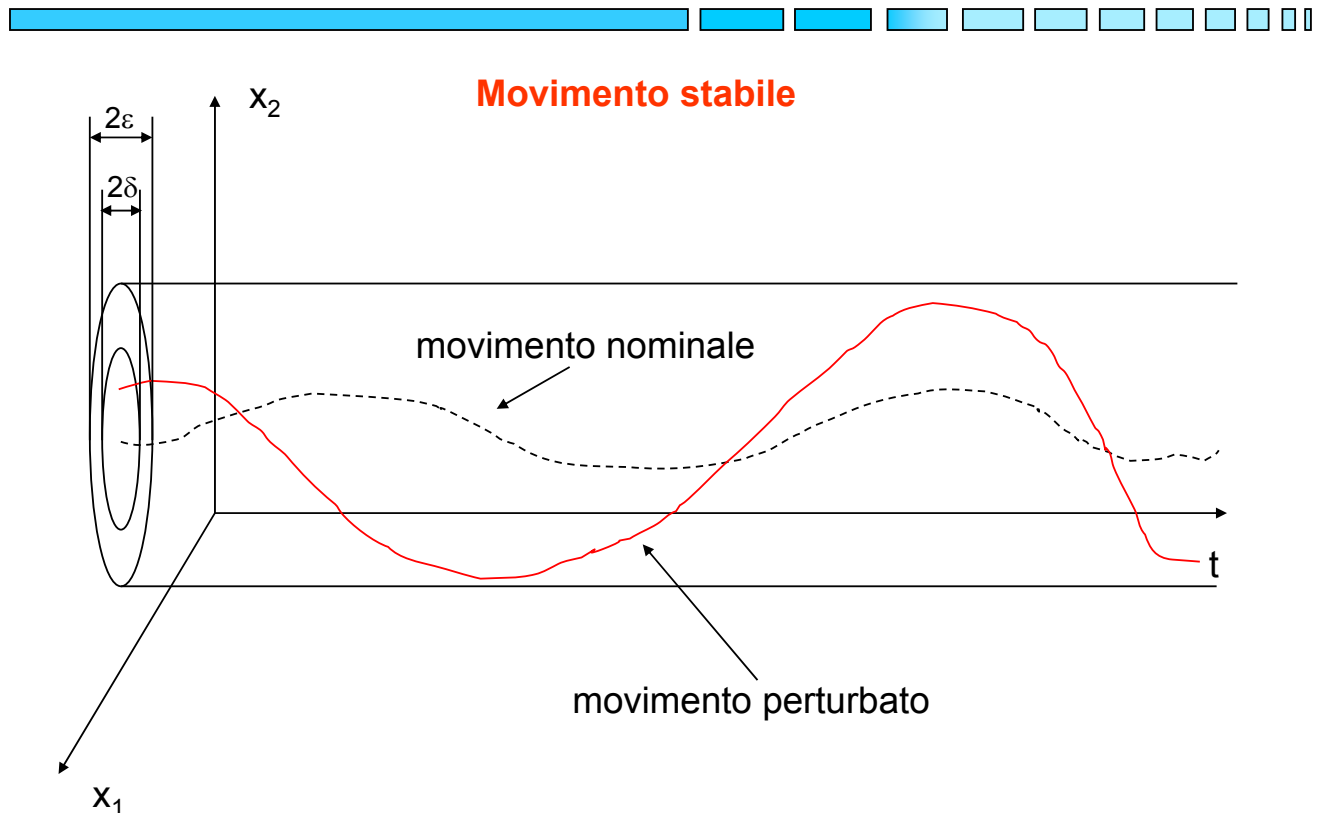
si dice inoltre **asintoticamente stabile** se è semplicemente stabile e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t, \bar{t}_0, \bar{x}(\bar{t}_0), \bar{u}(\cdot)) - \phi(t, \bar{t}_0, x(\bar{t}_0), \bar{u}(\cdot))\| = 0$$

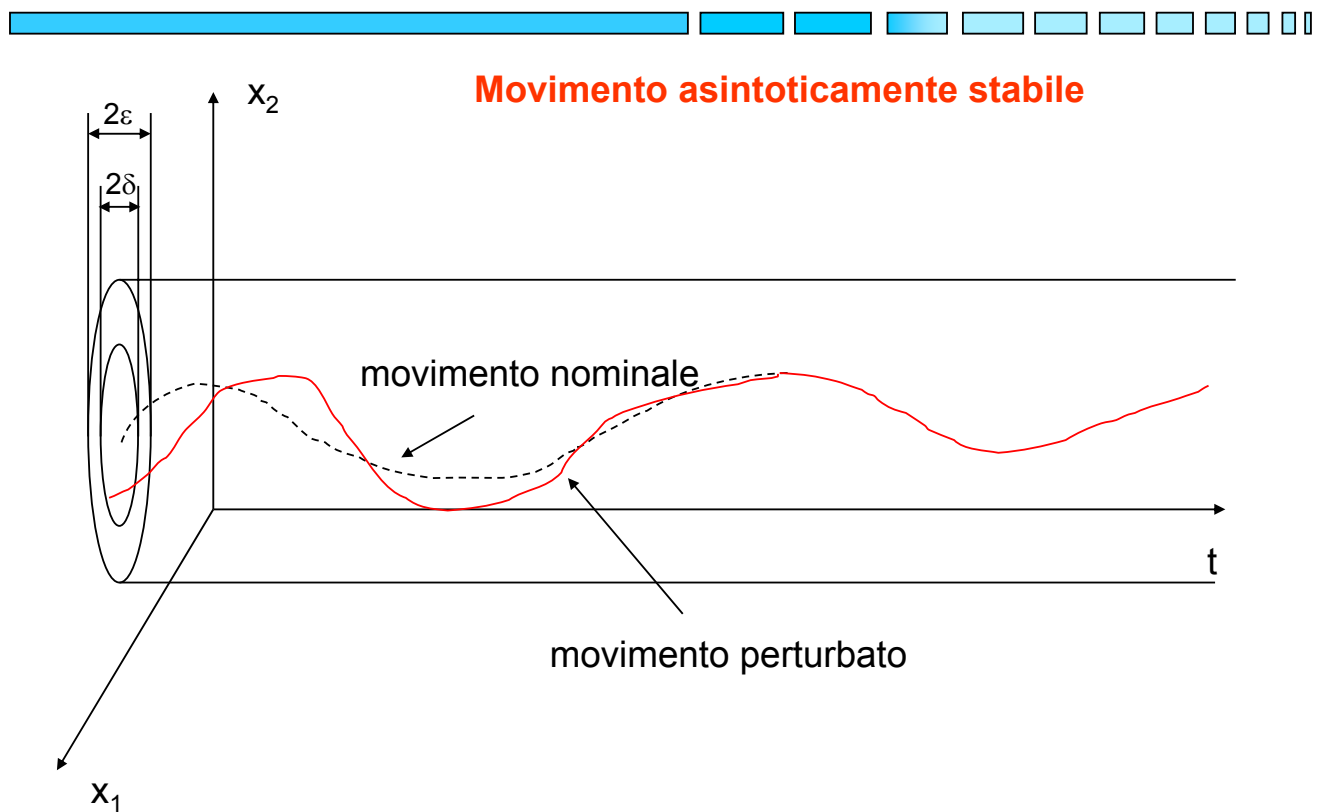
altrimenti, si dice **instabile**



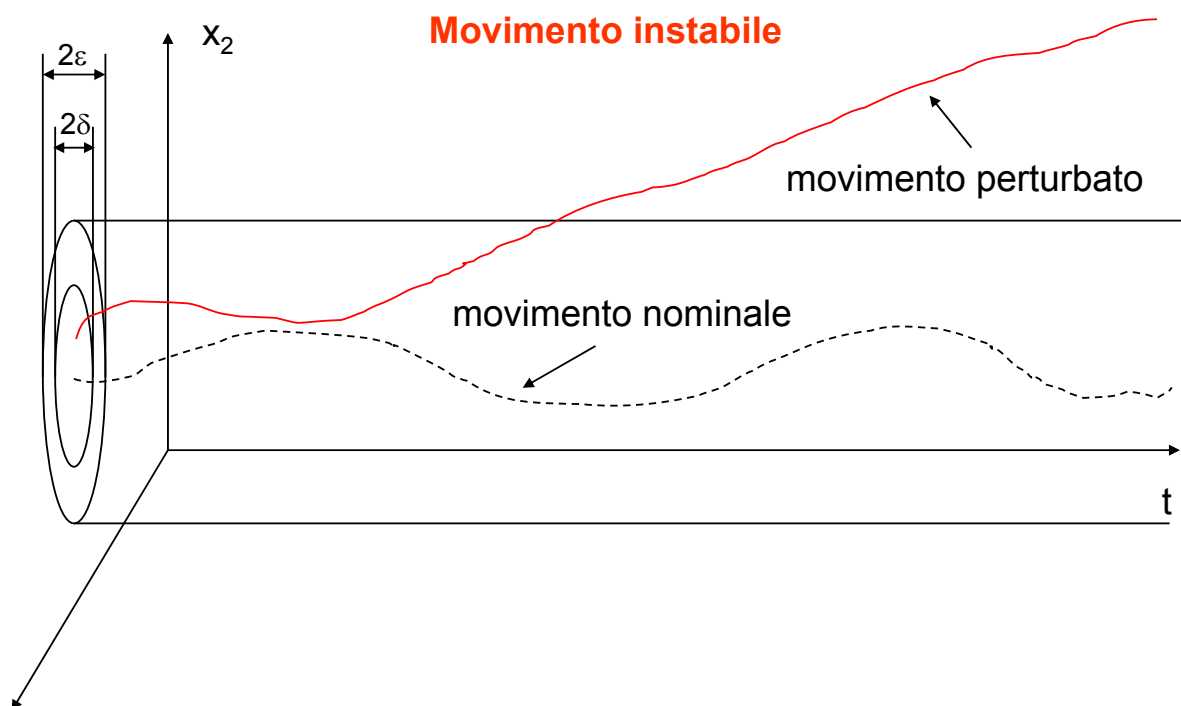
Stabilità: interpretazione geometrica



Stabilità: interpretazione geometrica



Stabilità: interpretazione geometrica



Stabilità e sistemi lineari stazionari (LTI)

- Per i sistemi LTI si può parlare di **stabilità del sistema** e non dei singoli punti di equilibrio o movimenti

- Se A è invertibile, il punto di equilibrio è unico

$$A\bar{x} + B\bar{u} = 0 \Rightarrow \bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$$

- L'unico movimento di interesse per la stabilità è il movimento libero, le cui caratteristiche dipendono solo dagli autovalori di A (e che **NON** dipendono dalla rappresentazione)



Stabilità e sistemi lineari stazionari (LTI)

- ➡ [TEOR.] Un sistema LTI **tempo-continuo** è asintoticamente stabile se e solo se tutti i suoi autovalori hanno **parte reale negativa**
- ➡ [TEOR.] Un sistema LTI **tempo-discreto** è asintoticamente stabile se e solo se tutti i suoi autovalori hanno **modulo minore di 1**



Raggiungibilità e Controllabilità

- ➡ **Obiettivo** dell'analisi: comprendere le possibilità di intervento su un sistema tramite l'azione di controllo (dualmente: stima tramite osservazioni)
- ➡ Tali proprietà del sistema sono **strutturali**:
 - **NON** dipendono dalla rappresentazione
 - **NON** sono modificabili tramite il controllo
- ➡ **Raggiungibilità / Controllabilità**:
 - Applicazione diretta: pianificazione dell'azione di controllo in catena aperta
 - Conseguenze: proprietà in catena chiusa



Raggiungibilità (da $x(t_0)=x_0$ a ?)

[Def.1]: Lo stato x_1 di un sistema dinamico è **raggiungibile** da x_0 nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ (con $t_0 < t_1$) se esiste una funzione di ingresso ammissibile $u(\cdot) \in \Omega$ tale che:

$$x_1 = x(t_1) = \phi(t_1, t_0, \underbrace{x(t_0)}_{x_0}, u(\cdot))$$

L'insieme degli stati raggiungibili all'istante t_1 a partire dall'evento (t_0, x_0) è indicato con

$$\mathcal{R}^+(t_0, t_1, x_0)$$



Controllabilità (da ?? a $x(t_1)=x_1$)

[Def.2]: Lo stato x_0 di un sistema dinamico è **controllabile** a x_1 nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ (con $t_0 < t_1$) se esiste una funzione di ingresso ammissibile $u(\cdot) \in \Omega$ tale che:

$$x_1 = x(t_1) = \phi(t_1, t_0, \underbrace{x(t_0)}_{x_0}, u(\cdot))$$

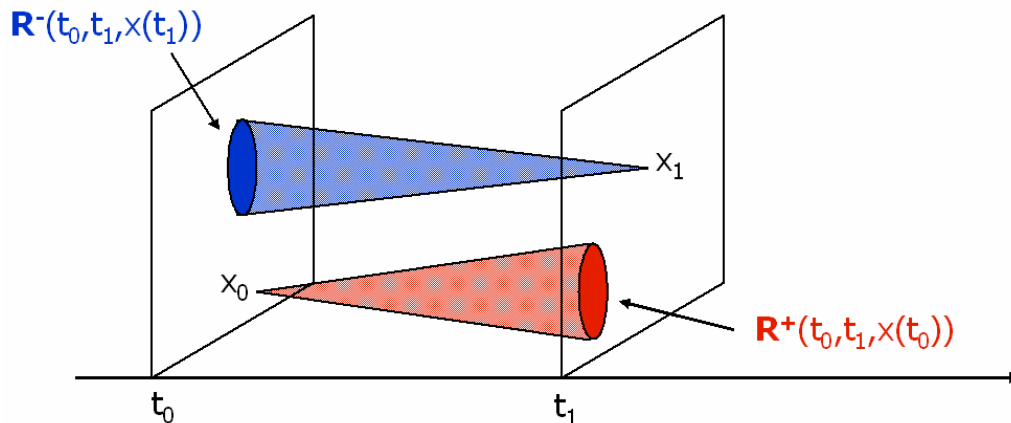
L'insieme degli stati controllabili all'evento (t_1, x_1) a partire dall'istante t_0 è indicato con

$$\mathcal{R}^-(t_0, t_1, x_1)$$



Raggiungibilità e Controllabilità

Concetti complementari:



NOTA: per i sistemi lineari tempo-invarianti (LTI), tali proprietà non dipendono da t_0 e t_1 ma solo da $t=t_1-t_0$ e si può considerare $x=0$ come unico punto di interesse

Tecniche di Controllo – Intro

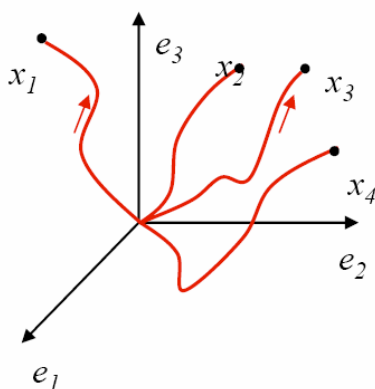


Raggiungibilità e Controllabilità complete

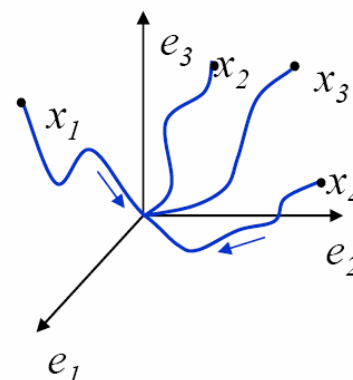
► Il sistema MIMO LTI t.continuo [t.discreto]

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad [x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)]$$

È **completamente raggiungibile** se qualunque stato può essere raggiunto da $x=0$ in un tempo finito



È **completamente controllabile** se $x=0$ può essere raggiunto da qualunque stato in t finito



Intro



Raggiungibilità e risposta forzata

- La possibilità di considerare $x=0$ come unico punto di interesse nei sistemi LTI lega la raggiungibilità unicamente alla risposta forzata:

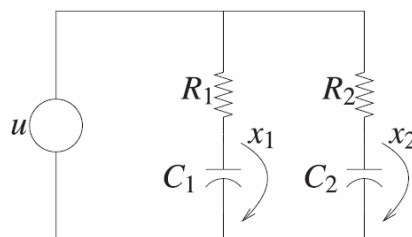
$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad \text{TEMPO CONTINUO}$$

$$x(k) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i) \quad \text{TEMPO DISCRETO}$$

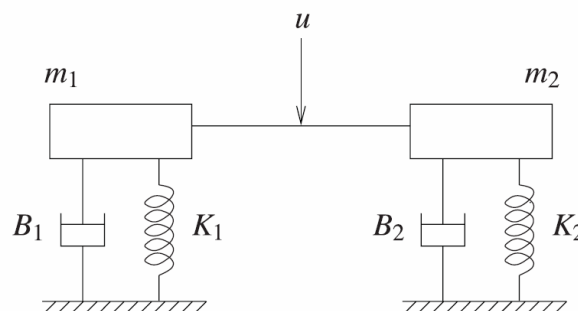


Esempi fisici

1) se $1/(R_1 \cdot C_1) = 1/(R_2 \cdot C_2)$



2) ancora un parallelo...



Esempi fisici

$$1) \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} u(t)$$

fissando $\omega = 1/(R_1 C_1) = 1/(R_2 C_2)$ e partendo dall'origine

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \alpha(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \alpha(t) := \omega \int_0^t e^{-\omega(t-\tau)} u(\tau) d\tau$$

per cui è impossibile portare l'origine verso qualunque condizione in cui $x_1(t) \neq x_2(t)$

2) considerazioni analoghe...



Raggiungibilità dei sistemi LTI t.discreti

► Insieme di stati raggiungibili in k passi per:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad x(0) = 0$$

$$x(1) = Bu(0)$$

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = ABu(0) + Bu(1)$$

$$x(3) = Ax(2) + Bu(2) = A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2)$$

...

$$x(k) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i) = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{k-1}B] \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

► Perciò: $\mathcal{R}_k^+(0) = \text{im}\{[B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{k-1}B]\}$

= **sottospazio stati raggiungibili** in k passi



Esempi

$$3) \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$\mathcal{R}_k^+(0) = \text{im}\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_3 & \cdots & a_3^{k-1} \end{bmatrix} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$4) \text{ Idem, ma con } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_2^+(0) = \text{im}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2$$



Sottospazio raggiungibile

► I sottospazi raggiungibili in 1,2,n passi soddisfano:

$$\mathcal{R}_1^+(0) \subseteq \mathcal{R}_2^+(0) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{R}_n^+(0) \subseteq \mathbb{R}^n$$

► Per un numero di passi $k \geq n$, applicando il
Teorema di Cayley-Hamilton:

$$\mathcal{R}_n^+(0) = \mathcal{R}_{n+1}^+(0) := \mathcal{R}^+(0)$$

e si definisce il **sottospazio raggiungibile**

$$\mathcal{R}^+(0) = \text{im}\{[B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B]\}$$



Teorema di Cayley-Hamilton

- Data la matrice A $n \times n$ e il polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\ &= \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n \end{aligned}$$

la matrice A è tale che

$$p(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_n I = 0$$

- Come conseguenza:

$$A^n = -a_1 A^{n-1} - \dots - a_n I$$



Matrice di raggiungibilità

- Poiché il sottospazio raggiungibile è:

$$\mathcal{R}^+(0) = \text{im}\{[B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]\}$$

si definisce **matrice di raggiungibilità**:

$$P^+ = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

- Il sistema è **completamente raggiungibile**

$(\mathcal{R}^+(0) = \mathbb{R}^n)$ se e solo se:

$$\text{rank}(P^+) = n$$



Raggiungibilità come proprietà strutturale

► Come detto, sistemi equivalenti, per i quali cioè:

$$\begin{aligned}\bar{A} &= T^{-1}AT \\ \bar{B} &= T^{-1}B\end{aligned}$$

hanno le stesse proprietà di raggiungibilità:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{R}}_k^+(0) &= \text{im}\{[\bar{B} \quad \bar{A}\bar{B} \quad \bar{A}^2\bar{B} \quad \dots \quad \bar{A}^{k-1}\bar{B}]\} \\ &= \text{im}\{T^{-1}[B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{k-1}B]\} \\ &= T^{-1}\mathcal{R}_k^+(0)\end{aligned}$$

per cui tali sottospazi hanno la stessa dimensione



Controllabilità dei sistemi LTI t.discreti

► Si consideri ancora $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$
con l'obiettivo di controllare (a 0) un certo $x(0) \neq 0$,
in k passi:

$$0 = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i) \quad \Rightarrow \quad -A^k x(0) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i)$$

→ $x(0) \neq 0$ è **controllabile** in k passi se $-A^k x(0)$
è **raggiungibile** in k passi

$$A^k x(0) \in \text{im}\left\{ \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{k-1}B \end{bmatrix} \right\} = \mathcal{R}_k^+(0)$$



Sottospazio controllabile

- ➡ Il **sottospazio controllabile** in k passi è pertanto:

$$\mathcal{R}_k^-(0) = \{x : A^k x \in \mathcal{R}_k^+(0)\}$$

- ➡ Il sistema è **controllabile in k passi** se vale la relazione di inclusione precedente per l'intero spazio degli stati, cioè:

$$\text{im}\{A^k\} \subseteq \mathcal{R}_k^+(0)$$

- ➡ Il sistema è **completamente controllabile** se l'intero spazio degli stati è controllabile in k passi per qualche k



Controllabilità in n passi

- ➡ In realtà, il **sistema è controllabile se e solo se è controllabile in n passi**:

$$\text{im}\{A^n\} \subseteq \mathcal{R}^+(0)$$

- ➡ Se il sistema è controllabile in k passi con $k \leq n$, si può infatti scegliere $u(k)=u(k+1)=\dots=u(n-1)=0$
- ➡ Se invece $k > n$, si ha sempre che

$$\text{im}\{A^n\} = \text{im}\{A^k\}$$



Controllabilità “contro” raggiungibilità

- Per sistemi LTI t.discreti fin qui trattati, le due proprietà **NON** sono equivalenti:

– **raggiungibilità** $\Rightarrow$ **controllabilità**

(se $\mathcal{R}^+(0) = \mathbb{R}^n$ ovviamente $\text{im}\{A^n\} \subseteq \mathcal{R}^+(0)$)

– **controllabilità** $\nRightarrow$ **raggiungibilità**

Es. se $A = 0$ e $\text{rank}(B) < n$, si ha controllabilità

($\text{im}\{A^n\} = \{0\} \subseteq \text{im}\{[B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]\}$)

ma non raggiungibilità: $\text{rank}([B \ 0 \ \dots \ 0]) < n$

- **Sono equivalenti se e solo se A è non singolare**



Raggiungibilità dei sistemi LTI t.continui

- Per $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ uno stato $x(t)$ è **raggiungibile** al tempo t se esiste una funzione di ingresso ammissibile $u(\cdot) \in \Omega$ tale che:

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

- Definendo l'operatore lineare $R_t : \Omega \rightarrow X$

$$R_t : u(\cdot) \rightarrow \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

$x(t)$ è raggiungibile al tempo t se e solo se

$$x(t) \in \text{im} R_t$$

pertanto il **sottospazio raggiungibile** al tempo t :

$$\mathcal{R}_t^+(0) = \text{im} R_t$$



Sottospazio raggiungibile e dipendenza da t

- Se gli elementi del vettore di ingresso possono **assumere valori arbitrariamente grandi**, il sottospazio raggiungibile non dipende da t

- Ciò è conseguenza del teorema che afferma:

*Il sottospazio raggiungibile al tempo $t > 0$ è l'immagine della **matrice di raggiungibilità**:*

$$P^+ = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

- Il sistema è quindi **completamente raggiungibile** se $\text{im}\{P^+\} = \mathbb{R}^n$



Controllabilità dei sistemi LTI t.continui

- Per $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ uno stato $x(0)$ è **controllabile** (a 0) al tempo t se esiste una funzione di ingresso ammissibile $u(\cdot) \in \Omega$ tale che:

$$0 = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$\text{ovvero } -x(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

perciò l'insieme degli stati controllabili al tempo t è un sottospazio $\mathcal{R}_t^-(0)$ tale che:

$$e^{At}\mathcal{R}_t^-(0) \subseteq \text{im}\{R_t\} = \mathcal{R}^+(0)$$



Controllabilità “contro” raggiungibilità

- ➡ La relazione di inclusione precedente è valida anche in senso inverso, inoltre per l'invertibilità dell'esponenziale di matrice:

$$\mathcal{R}_t^-(0) = \mathcal{R}^+(0)$$

il che significa anche che il sottospazio controllabile **non dipende** da t!

- ➡ Pertanto, nei sistemi LTI t.continui, a differenza di quelli t.discreti:

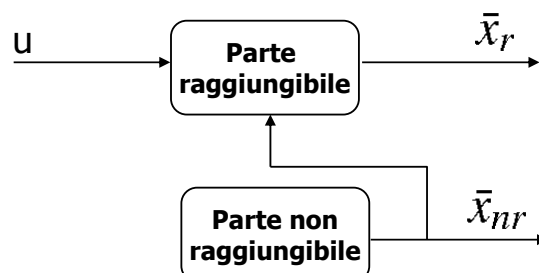
raggiungibilità $\Leftrightarrow$ **controllabilità**



Forma canonica di raggiungibilità: scomposizione

- ➡ Se il sistema non è completamente raggiungibile, è sempre possibile (e comodo per alcune analisi) trasformare il sistema in

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_r \\ \dot{\bar{x}}_{nr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_r \\ \bar{x}_{nr} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$



Considerazioni “applicative”

- ➡ Le proprietà analizzate permettono di progettare leggi di controllo in **catena aperta**, ma a **minima energia** (es. per sistemi t.discreto, basate sulla (pseudo)inversa della matrice P^+)
- ➡ Nel progetto di controllo in **catena chiusa** (es. retroazione dello stato), occorre considerare che il controllore non è in grado di agire sulla parte non raggiungibile del sistema (qualora sia presente).
- ➡ Se la parte non raggiungibile è stabile, allora il sistema è (almeno..) **stabilizzabile**



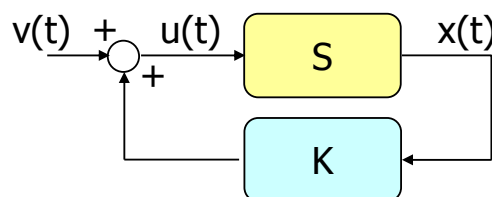
Controllo in retroazione e stabilizzabilità

- ➡ Infatti, dato un sistema LTI completamente raggiungibile

$$S = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

e ipotizzando che x sia completamente **misurabile**, la legge di controllo con retroazione dello stato

$$u(t) = Kx(t) + v(t)$$



con $\dim(K) = m \times n$, permette di modificare arbitrariamente gli autovalori del sistema



Controllo in retroazione e stabilizzabilità

- Il sistema in catena chiusa diventa infatti

$$S_K = \begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + Bv(t) \\ y(t) = (C + DK)x(t) + Dv(t) \end{cases}$$

i cui autovalori sono ovviamente quelli di $A+BK$

- ATTENZIONE: se il sistema NON è completamente raggiungibile, è possibile modificare SOLO gli autovalori della parte raggiungibile
- Se gli autovalori della parte NON raggiungibile sono a parte reale negativa, il sistema (come detto) viene definito **stabilizzabile**



Osservabilità ($x(t_0)=x_0$ e $u(\cdot)/y(\cdot)$)

- [Def.3]:** Lo stato x_0 di un sistema dinamico è **compatibile** con le funzioni di ingresso $u(\cdot)$ e uscita $y(\cdot)$ nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ ($t_0 < t_1$) se:

$$y(\tau) = \eta(\tau, t_0, \underbrace{x(t_0)}_{x_0}, u(\cdot)) \quad \forall \tau \in [t_0, t_1]$$

L'insieme degli stati iniziali compatibili con $u(\cdot)$ e $y(\cdot)$ nell'intervallo $[t_0, t_1]$ è indicato con

$$\mathcal{E}^-(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))$$



Ricostruibilità ($x(t_1)=x_1$ e $u(.) / y(.)$)

► **[Def.4]:** Lo stato x_1 di un sistema dinamico è **compatibile** con le funzioni di ingresso $u(.)$ e uscita $y(.)$ nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ ($t_0 < t_1$) se:

$$x(t_1) = x_1 = \phi(t_1, t_0, x(t_0), u(\cdot)) \quad x(t_0) \in \mathcal{E}^-(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))$$

L'insieme degli stati finali compatibili con $u(.)$ e $y(.)$ nell'intervallo $[t_0, t_1]$ è indicato con

$$\mathcal{E}^+(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))$$



Indistinguibilità tra due stati x' e x''

► **[Def.5]:** Due stati x' e x'' sono **indistinguibili nel futuro** nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ ($t_0 < t_1$) se per tutte le funzioni di ingresso $u(.) \in \Omega$:

$$\eta(t, \phi(t, t_0, x', u(\cdot)), u(\cdot)) = \eta(t, \phi(t, t_0, x'', u(\cdot)), u(\cdot)) \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

Un sistema è **completamente osservabile** in $[t_0, t_1]$ se l'insieme degli stati iniziali compatibili con $u(.)$ e $y(.)$ comprende un solo elemento per ogni $u(.) \in \Omega$ e per ogni $y(.) \in \Gamma(t_0, u(\cdot))$



Osservabilità (indistinguibilità) e risposta libera

► Nei sistemi LTI, è possibile:

- considerare solo sistemi puramente dinamici
- considerare solo $t=t_1-t_0$
- considerare solamente la risposta libera per valutare l'indistinguibilità, poiché:

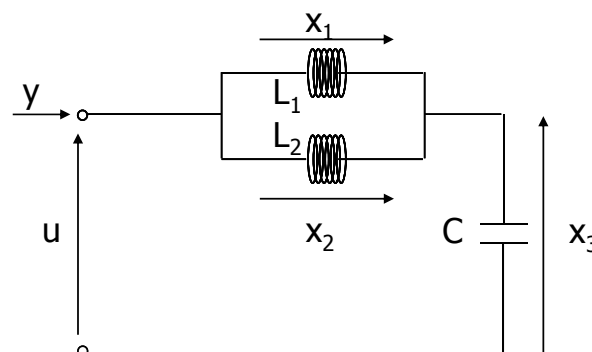
$$\eta(t, \phi(t, t_0, x', u(\cdot))) = \eta(t, \phi_l(t, t_0, x')) + \eta(t, \phi_f(t, t_0, u(\cdot)))$$

$$\eta(t, \phi(t, t_0, x'', u(\cdot))) = \eta(t, \phi_l(t, t_0, x'')) + \eta(t, \phi_f(t, t_0, u(\cdot)))$$



Sistemi non osservabili

► Es.3 (ancora un parallelo..)



Qualunque stato iniziale con $x_1+x_2=0$ è indistinguibile dall'origine dello spazio degli stati



Indistinguibilità nei sistemi LTI t.discreti

- Due stati x' e x'' sono **indistinguibili nel futuro** in k passi se per ogni successione di ingresso:

$$u(0), u(1), u(2), \dots, u(k-1)$$

le successioni di uscita y' e y'' , corrispondenti agli stati iniziali x' e x'' , coincidono per i primi k passi, vale a dire:

$$CA^i x' = CA^i x'' \quad 0 \leq i \leq k$$

condizione che si può scrivere anche come:

$$(x' - x'') \in \ker \left\{ \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & \dots & CA^k \end{bmatrix}^T \right\}$$



Indistinguibilità nei sistemi LTI t.discreti - 1

- Due stati x' e x'' sono **indistinguibili nel futuro** se lo sono in k passi per ogni k
- Per il teorema di Cayley-Hamilton:

$$\ker \left\{ \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & \dots & CA^k \end{bmatrix}^T \right\} = \ker \left\{ \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & \dots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^T \right\}$$

per $k \geq n-1$, pertanto l'indistinguibilità nel futuro fra due stati x' e x'' è collegata unicamente alla matrice

$$\begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & \dots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^T$$



Sottospazio non osservabile

- ➡ Se consideriamo l'indistinguibilità da 0 (in k passi o per estensione analoga alla precedente, per qualunque k), si definisce la condizione di **non osservabilità** di uno stato x come:

$$x \in \ker\{[C \quad CA \quad CA^2 \quad \dots \quad CA^{n-1}]^T\}$$

- ➡ La matrice: $O^- = [C \quad CA \quad CA^2 \quad \dots \quad CA^{n-1}]^T$ è detta **matrice di osservabilità** e $\mathcal{E}^- = \ker\{O^-\}$ **sottospazio non osservabile** del sistema



Osservabilità

- ➡ Se il sottospazio non osservabile contiene solo 0:

$$\ker\{O^-\} = \{0\}$$

allora il sistema si dice **osservabile**

- ➡ Ciò naturalmente equivale anche a testare:

$$\text{rank}\{O^-\} = n$$

- ➡ Vedi considerazioni sul sottospazio di non raggiungibilità...



Indistinguibilità nei sistemi LTI t.continui

- Analogamente al caso t.discreto, due stati x' e x'' sono indistinguibili nel futuro nell'intervallo $[0, t]$ se (e solo se):

$$Ce^{A\tau}x' = Ce^{A\tau}x'' \quad \forall \tau \in [0, t]$$

- Definendo l'operatore lineare:

$$O_t : \mathbf{X} \rightarrow \Gamma(0, t) \quad O_t : x \rightarrow y_l(\tau) = Ce^{A\tau}x \quad \tau \in [0, t]$$

allora uno stato x è indistinguibile da 0 (non osservabile) se: $x \in \ker O_t$



Test di osservabilità per sistemi LTI t.continui

- Si può dimostrare che anche per un sistema LTI t.continuo:

Il sottospazio non osservabile in $[0, t]$ è (per ogni $t > 0$) il nucleo della matrice di osservabilità:

$$O^- = [C \quad CA \quad CA^2 \quad \dots \quad CA^{n-1}]^T$$

e il sistema è **osservabile** se:

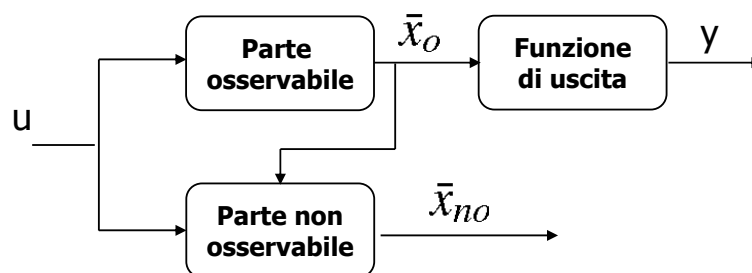
$$\ker\{O^-\} = \{0\} \quad \text{rank}\{O^-\} = n$$



Forma canonica di osservabilità: scomposizione

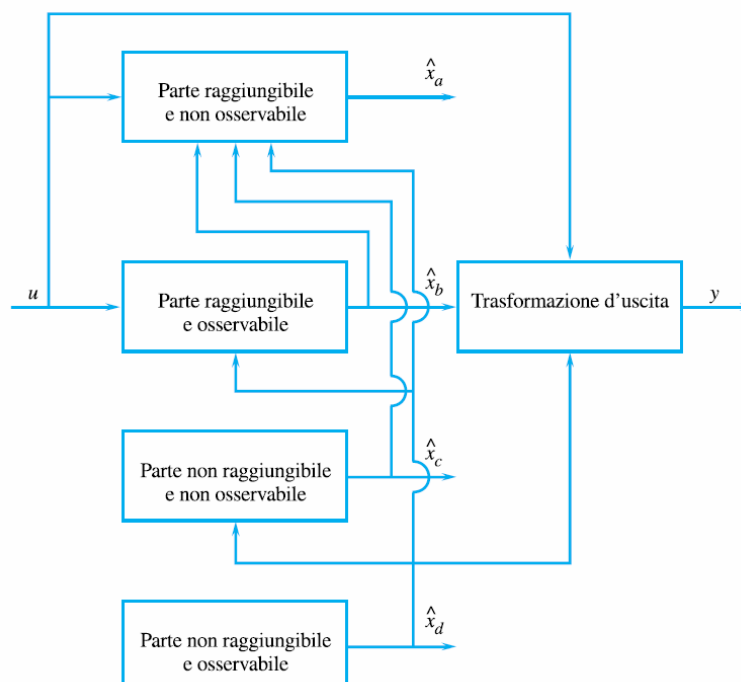
- Se il sistema non è completamente osservabile, è sempre possibile (e comodo per alcune analisi) trasformare il sistema in

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_o \\ \dot{\bar{x}}_{no} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{x}_{no} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{pmatrix} u \\ y = (\bar{C}_1 \ 0) \begin{pmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{x}_{no} \end{pmatrix} \end{cases}$$



Scomposizione canonica

- Unendo le due trasformazioni viste



Dualità

- I risultati ottenuti dalle analisi di raggiungibilità e osservabilità mostrano notevoli analogie.
- Per formalizzare tali analogie, si usa ricorrere alla definizione di **dualità** (qui nel caso LTI t. continuo)
- Dato:
$$S = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

si definisce **sistema duale**:

$$S_D = \begin{cases} \dot{x}(t) = A^T x(t) + C^T u(t) \\ y(t) = B^T x(t) + D^T u(t) \end{cases}$$



Dualità - 1

- Il numero di ingressi (uscite) di S corrisponde al numero di uscite (ingressi) di S_D
- Le matrici di raggiungibilità e osservabilità di S_D (P_D^+ e O_D^-) sono legate a quelle di S (P^+ e O^-) come segue:

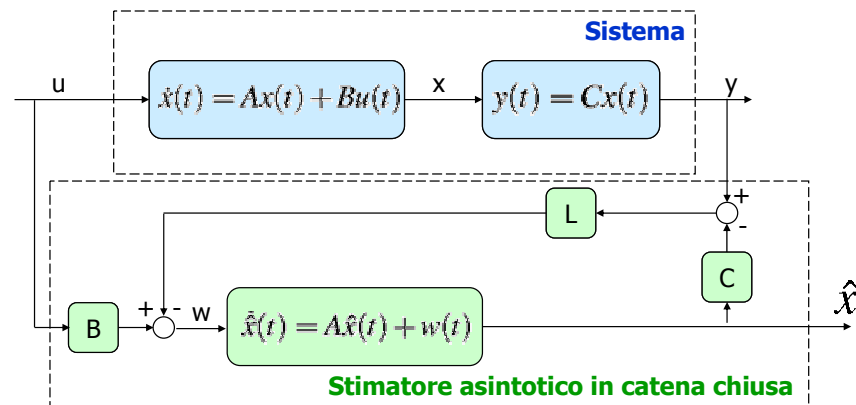
$$P_D^+ = (C^T \quad A^T C^T \quad \dots \quad (A^T)^{n-1} C^T) = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}^T = (O^-)^T$$

$$O_D^- = \begin{pmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{n-1} \end{pmatrix} = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1} B)^T = (P^+)^T$$



Considerazioni “applicative”

- Il progetto di stimatori asintotici dello stato in catena chiusa:



può, grazie alla proprietà di dualità, essere effettuato sfruttando i metodi di allocazione degli autovalori per il progetto di controllori con retroazione dello stato.



Dinamica dell'osservatore asintotico

- Infatti, le equazioni dell'osservatore dello stato in catena chiusa sono:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(y(t) - C\hat{x}(t)) = (A + LC)\hat{x}(t) - Ly(t) + Bu(t)$$

- Definendo $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ la dinamica dell'errore è

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) = \\ &= Ax(t) - A\hat{x}(t) + LCx(t) - LC\hat{x}(t) = (A + LC)(x(t) - \hat{x}(t)) = (A + LC)e(t) \end{aligned}$$

i cui autovalori sono quelli di $A+LC$. Se la coppia (A,C) è osservabile, per dualità la coppia (A^T, C^T) è raggiungibile e gli autovalori dell'osservatore possono essere assegnati in modo arbitrario.



Progetto osservatore e rilevabilità

- ➡ Analogamente al caso del progetto di controllo, gli autovalori dell'osservatore possono essere assegnati arbitrariamente SOLO se il sistema è completamente osservabile
- ➡ Se non lo è, è ancora possibile costruire un osservatore asintotico purchè gli autovalori della parte non osservabile siano a parte reale negativa
- ➡ Il sistema in tal caso viene detto **rilevabile**



Controllo con retroazione dello stato stimato

- ➡ In generale, le variabili di stato non sono TUTTE misurabili direttamente, ma se il sistema è osservabile si può sfruttare il progetto di un osservatore ANCHE realizzare il controllo con retroazione completa dello stato (stimato)
- ➡ La dinamica del sistema complessivo diventa:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ u(t) = K\hat{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(y(t) - C\hat{x}(t)) \end{cases}$$

o in forma compatta:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax + BK\hat{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) = (A + LC + BK)\hat{x}(t) - LCx(t) \end{cases}$$



Principio di separazione

- Esprimendo la dinamica in termini di $x(t)$, stato reale, ed $e(t)$, errore di stima:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A+LC \end{pmatrix}}^{A_R} \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix} \\ y(t) = (C \quad 0) \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

i cui autovalori sono costituiti dall'unione di quelli di $A+BK$ con quelli di $A+LC$.

- Questi autovalori sono assegnabili arbitrariamente e **separatamente** per la parte di controllo e di osservazione

