TECNICHE DI CONTROLLO

Richiami di Teoria dei Sistemi

Dott. Ing. SIMANI SILVIO

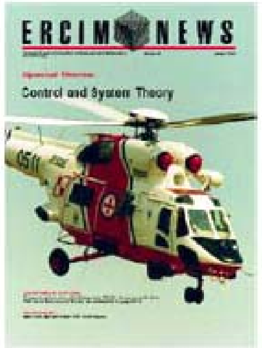
con supporto del

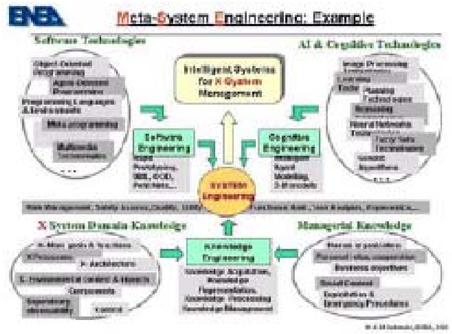
Dott. Ing. BONFE' MARCELLO

Sistemi e Modelli

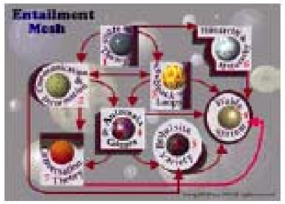
Da diversi anni, i termini:

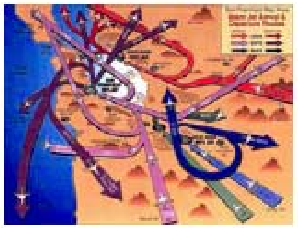
- "Sistema",
- "Teoria dei Sistemi",
- "Ingegneria dei Sistemi"
- ...





sono divenuti di uso corrente in campi e discipline anche molto diverse: controllo dei processi, elaborazione dati, biologia, economia, ecologia, gestione aziendale, gestione traffico, ...



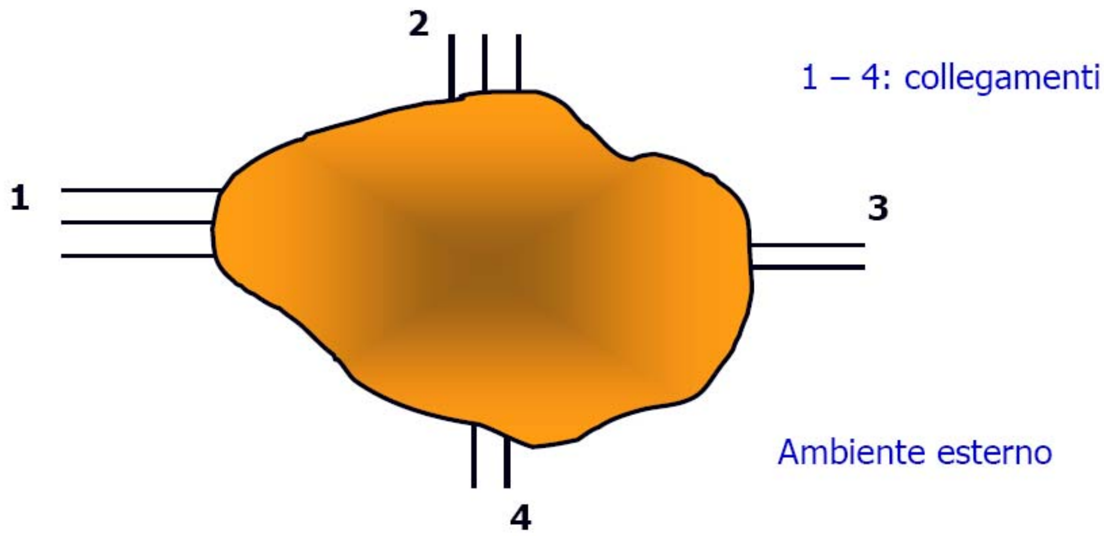


Sistema: "elemento" comune in questa terminologia

➡ Necessità di definire e studiare le *proprietà strutturali* dei "sistemi"

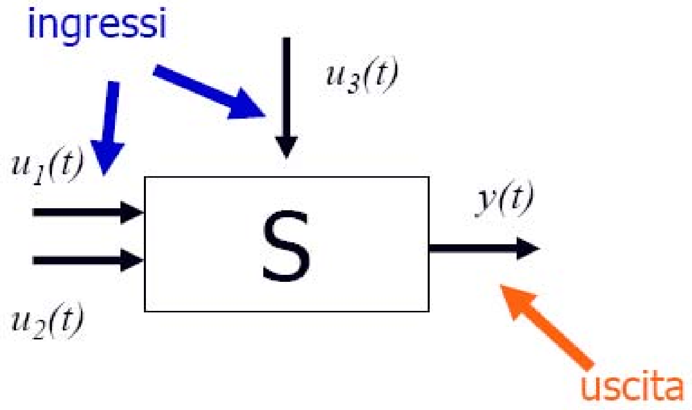
Concetto di Sistema

- **Sistema:** insieme, artificialmente isolato dal contesto, costituito da più parti tra loro interagenti di cui si vuole indagare il comporamento
- **Attributo misurabile**: caratteristica che può essere messa in relazione con un insieme di simboli o numeri (interi, reali, complessi)
- **Modello matematico**: equazioni che descrivono le relazioni tra gli attributi misurabili.



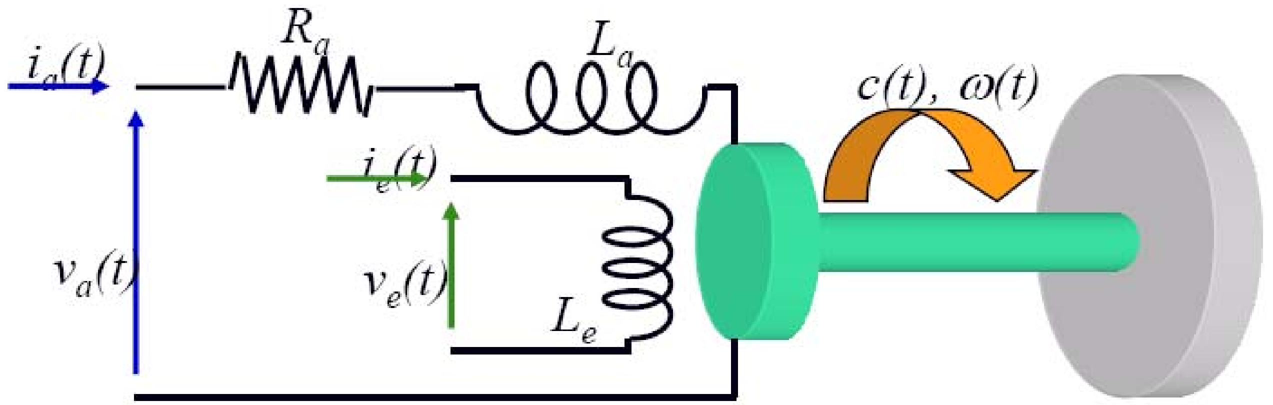
Causa → Effetto

- Un sistema *orientato* è un sistema in cui le variabili sono suddivise in
  - Variabili di ingresso (cause)
  - Variabili di uscita (effetti)



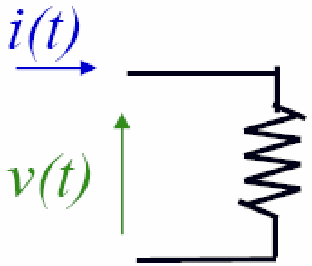
- Non sempre la suddivisione tra ingressi ed uscite (cause ed effetti) è univoca

Es.: Motore.. o generatore?

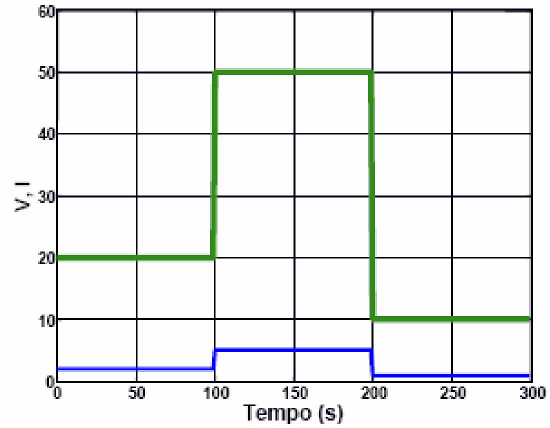


Sistemi e Dinamica

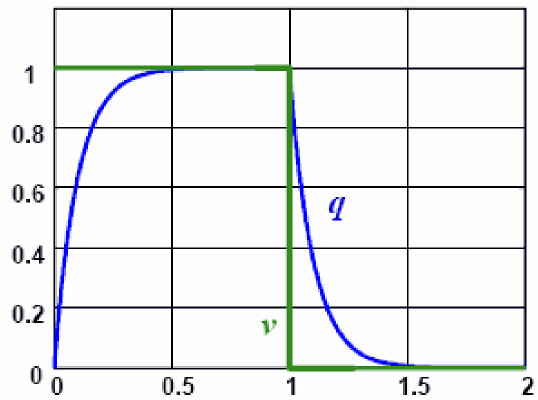
- Sistema statico (algebrico)

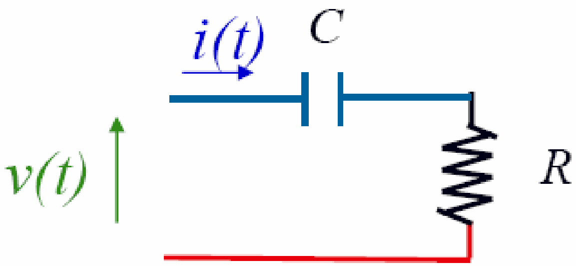


$$v(t) = R\, i(t)$$



- Sistema dinamico



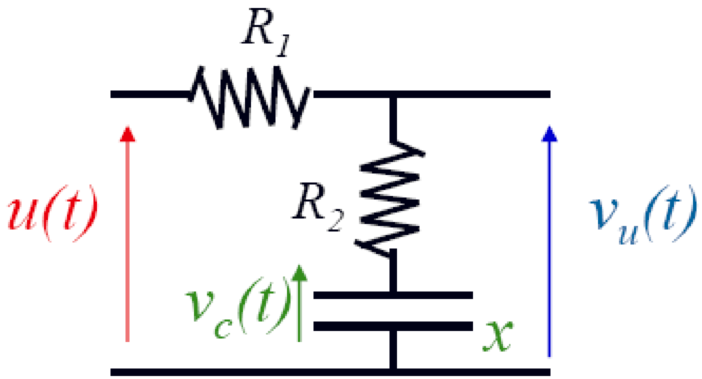


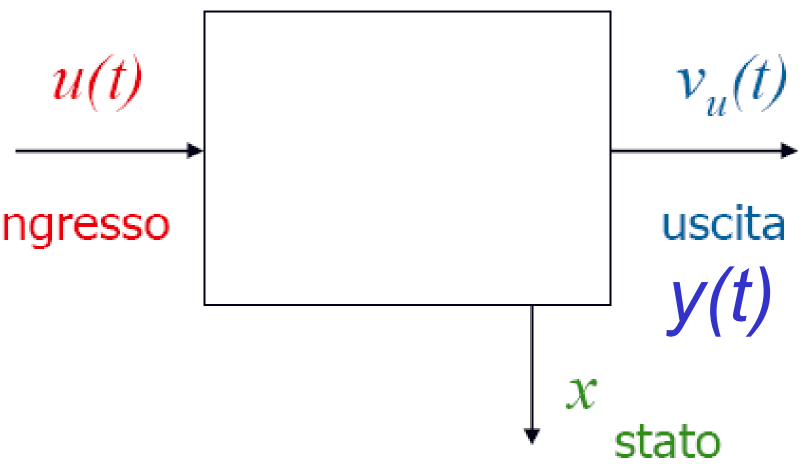
$$v(t) = R\, i(t) + \frac{1}{C}\int i(\tau)d\tau$$

Sistemi e Dinamica

- ***Sistemi dinamici:*** dotati di memoria. I valori dell'uscita, in un dato istante, dipendono ***anche*** dalla evoluzione degli ingressi negli istanti precedenti (storia – memoria).

- *Rete elettrica con elementi che accumulano energia* (capacità e/o induttanze)





Considerazioni "energetiche"

- Lo **stato** è l'informazione sulla "situazione interna" di un sistema, necessaria per predire l'effetto della sua storia passata sul suo comportamento futuro.
- Lo **stato** nei sistemi fisici è determinato dall'**accumulo di energia** (quantità di moto, energia potenziale, carica elettrica, ecc.)
- La scelta delle variabili di stato per la modellazione matematica è comunque **arbitraria e non univoca!**

Considerazioni “energetiche”

- In ogni dominio fisico ci sono sempre **UNO o DUE** elementi che caratterizzano l’accumulo di energia
  - **Elettrico**: capacità (C) e induttanza (L)
  - **Meccanico traslante**: massa (M) e reciproco della rigidità (1/K)
  - **Meccanico rotante**: momento di inerzia (J) e reciproco della rigidità torsionale (1/K)
  - **Fluidico**: capacità fluidica (Cf) e induttanza fluidica (Lf)
  - **Termico**: capacità termica (Ct)

Considerazioni "energetiche"

dominio	accumulo "capacitivo"	accumulo "induttivo"
elettrico	$E = \frac{1}{2} C v^2$	$E = \frac{1}{2} L i^2$
meccanico traslante	$E = \frac{1}{2} M v^2$	$E = \frac{1}{2} \frac{1}{K} f^2$
meccanico rotante	$E = \frac{1}{2} J \omega^2$	$E = \frac{1}{2} \frac{1}{K} c^2$
idraulico/pneumatico	$E = \frac{1}{2} C_f p^2$	$E = \frac{1}{2} L_f q^2$
termico	$E = C_t T$	manca

l'energia accumulata dipende dalle → **variabili ai morsetti** / **variabili passanti**

Modelli matematici analitici: equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t) \\ \ldots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t) \\ \ldots \\ y_p(t) = g_p(x_1(t), \ldots, x_n(t), u_1(t), \ldots, u_m(t), t) \end{cases}$$

Modelli matematici analitici: equazioni differenziali

I vettori

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \dots \\ u_m(t) \end{pmatrix} \qquad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \dots \\ y_p(t) \end{pmatrix}$$

sono, rispettivamente, i vettori di

- ***Stato***: $x(t) \in \mathbf{X}$, $\mathbf{X} = R^n$
- ***Ingresso***: $u(t) \in \mathbf{U}$, $\mathbf{U} = R^m$
- ***Uscita***: $y(t) \in \mathbf{Y}$, $\mathbf{Y} = R^p$

all' istante $t \in \mathbf{T} = R$

Modelli matematici analitici: equazioni differenziali

Compattando la notazione, scriveremo le equazioni che rappresentano un sistema regolare come:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

dove *x(t), u(t)* e *y(t)* sono vettori e *f* e *g* sono vettori di funzioni.

f è detta *funzione di velocità di transizione dello stato*
g è detta *funzione di uscita*

Il sistema descritto è di ***dimensione n con m ingressi e p uscite.***

Tipologie di sistemi

Si possono distinguere, in base al numero di ingressi e di uscite, i seguenti tipi di sistema:

- **MIMO** (Multiple Input Multiple Output): sistema con m (>1) ingressi e p (>1) uscite
- **MISO** (Multiple Input Single Output): sistema con m (>1) ingressi e un'uscita sola (p=1)
- **SIMO** (Single Input Multiple Output): sistema con un solo ingresso (m=1) e p (>1) uscite
- **SISO** (Single Input Single Output): sistema con un solo ingresso (m=1) e una sola uscita (p=1)

Classificazione dei modelli

Lineare

Stazionario

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t)\\ y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t)\end{aligned}$$

Non Stazionario

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t)\\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)\end{aligned}$$

Con $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ continue a tratti

Non lineare

Stazionario

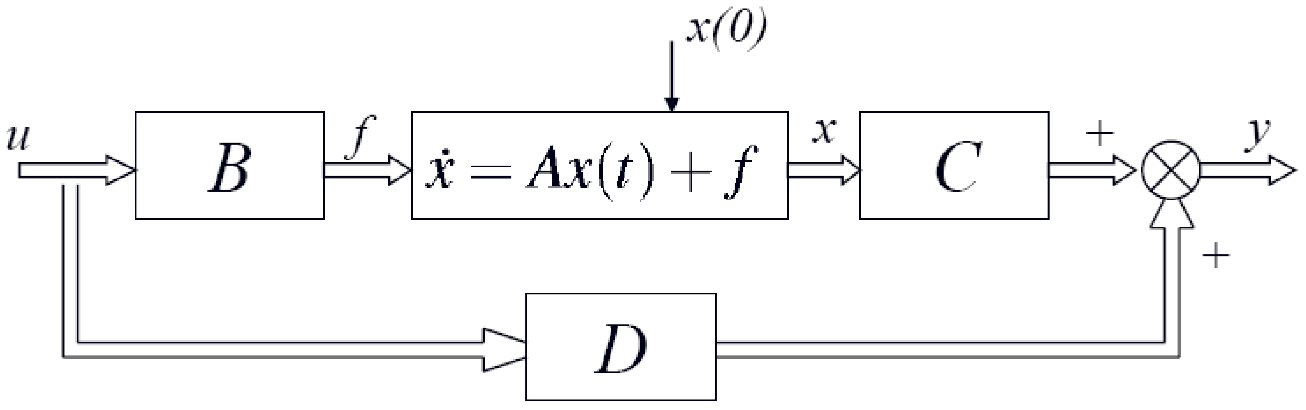
$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t))\\ y(t) &= g(x(t), u(t))\end{aligned}$$

Non Stazionario

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t)\\ y(t) &= g(x(t), u(t), t)\end{aligned}$$

La classe di modelli più... “apprezzata”!

- Un sistema lineare stazionario (caso particolare) è rappresentato:
  - nel caso MIMO da 4 matrici (A, B, C, D)
  - nel caso SISO da (A, b, c, d).



u : ingresso; y : uscita; f : azione forzante; x : stato

A : matrice del sistema
B : matrice di distribuzione degli ingressi
C : matrice di distribuzione delle uscite
D : matrice del legame algebrico ingresso/uscita

La classe di modelli più... “apprezzata”!

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrice Quadrata

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \dots & c_{pn} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{p1} & \dots & d_{pm} \end{pmatrix}$$

NB: se il sistema è puramente dinamico D = 0

Rappresentazioni equivalenti

Introducendo il concetto di stato, abbiamo detto che **NON** esiste un modo unico di scegliere le variabili di stato per rappresentare un sistema dinamico.

Per un sistema LTI, una volta scelta una base per **X=R**^{n}, **U=R**^{m} e **Y=R**^{p} e scelte le variabili di stato, esso è rappresentato da:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Consideriamo una matrice n x n T costante e non singolare e mediante un *cambio di variabili* definiamo un nuovo vettore di stato x come:

$$z = Tx \iff x = T^{-1}z$$

Rappresentazioni equivalenti

Sostituendo nelle equazioni di partenza si ottiene:

$$
\begin{cases}
\dot{z}(t) = \bar{A}z(t) + \bar{B}u(t) \\
\\
y(t) = \bar{C}z(t) + \bar{D}u(t)
\end{cases}
\qquad\qquad
\begin{array}{ll}
\bar{A} = TAT^{-1} & \bar{B} = TB \\
\bar{C} = CT^{-1} & \bar{D} = D
\end{array}
$$

Il sistema LTI rappresentato da queste equazioni è *equivalente* al sistema LTI di partenza nel senso che per un ingresso u(t), t ¸ 0, e due stati iniziali legati dalla condizione

$$z_0 = Tx_0$$

Le funzioni dello stato x(t) e z(t) sono legate dalla relazione

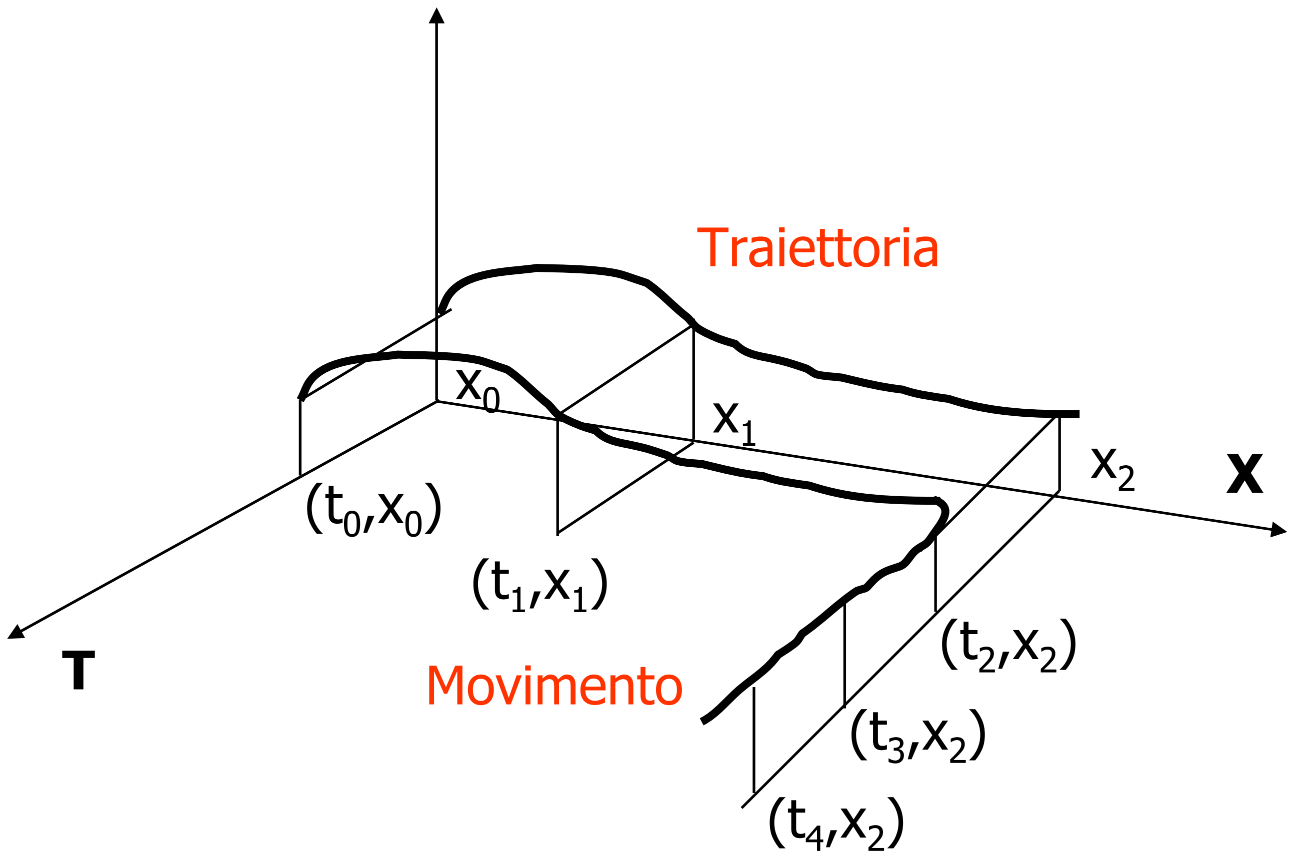
$$z(t) = Tx(t) \quad \forall t \geq 0$$

e le uscite sono identiche.

Analisi dei sistemi

- **Analisi del moto o della risposta**: soluzione delle equazioni differenziali per determinare il moto di x o la risposta di y, dato u.
- **Analisi della stabilità**: verifica di come le variazioni limitate sul valore iniziale di x e sulla funzione di u influenzino il moto di x o la risposta di y.
- **Analisi della controllabilità**: verifica delle possibilità di influire su x e y, agendo opportunamente su u
- **Analisi dell'osservabilità**: verifica delle possibilità di determinare x, note le funzioni di y e u

Movimento (o moto), traiettoria ed equilibrio



Perchè "apprezzare" i sistemi lineari stazionari (LTI)

- Per i sistemi lineari stazionari o Lineari Tempo-Invarianti (LTI) le analisi citate si effettuano con "semplici" risultati di algebra lineare
- Dato:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(0) = x_0$$

La soluzione dell'equazione è data dalla *formula di Lagrange* :

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Moto libero + moto forzato

Inoltre, vale il principio della *sovrapposizione degli effetti*

Esponenziale di matrice

- La formula di Lagrange si basa sull'**esponenziale di matrice**, calcolabile come estensione della funzione esponenziale scalare (tramite espansione in serie):

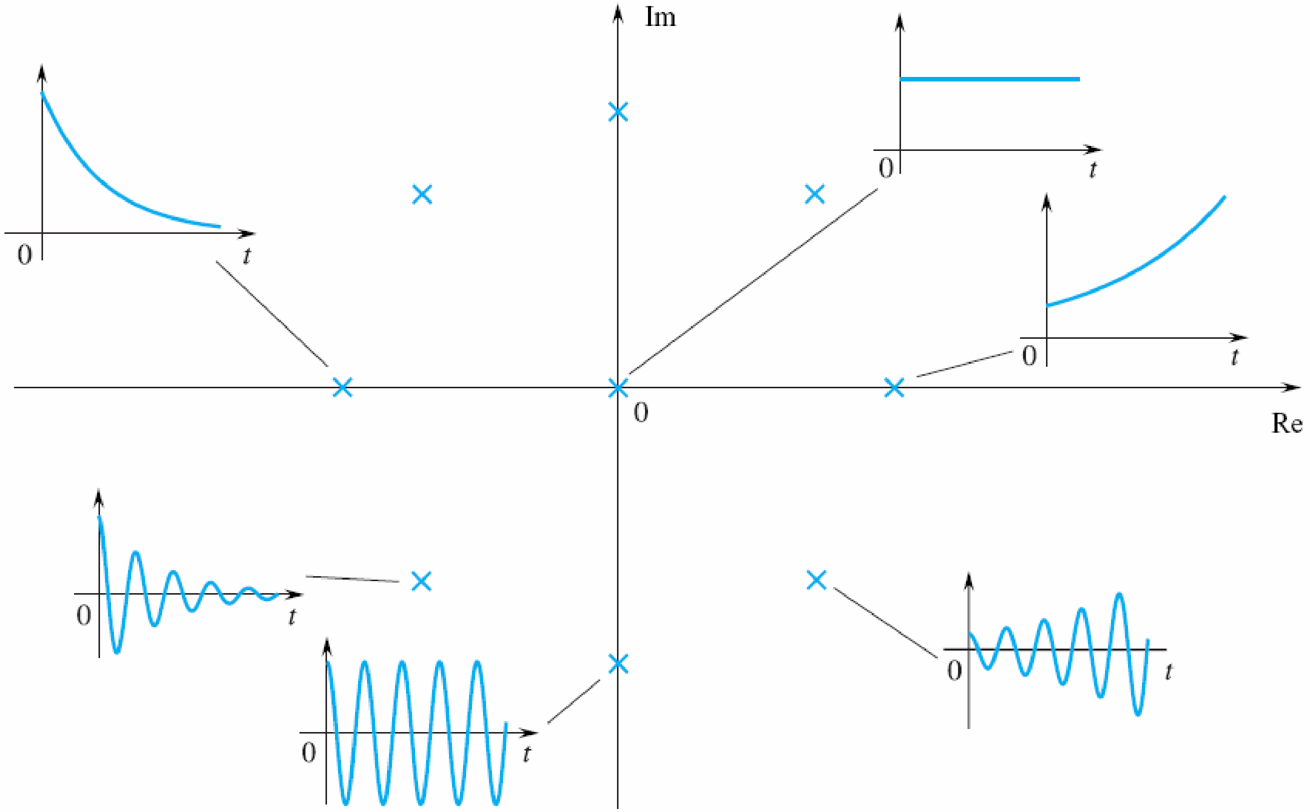
$$e^{at} = \sum_{i=0}^{\infty} 1 + at + a^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + a^n \frac{t^n}{n!} + \dots \qquad a \in \mathbb{R}$$

Analogamente, è possibile definire l'esponenziale di una matrice come:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + A^n \frac{t^n}{n!} + \dots \qquad \text{A matrice quadrata}$$

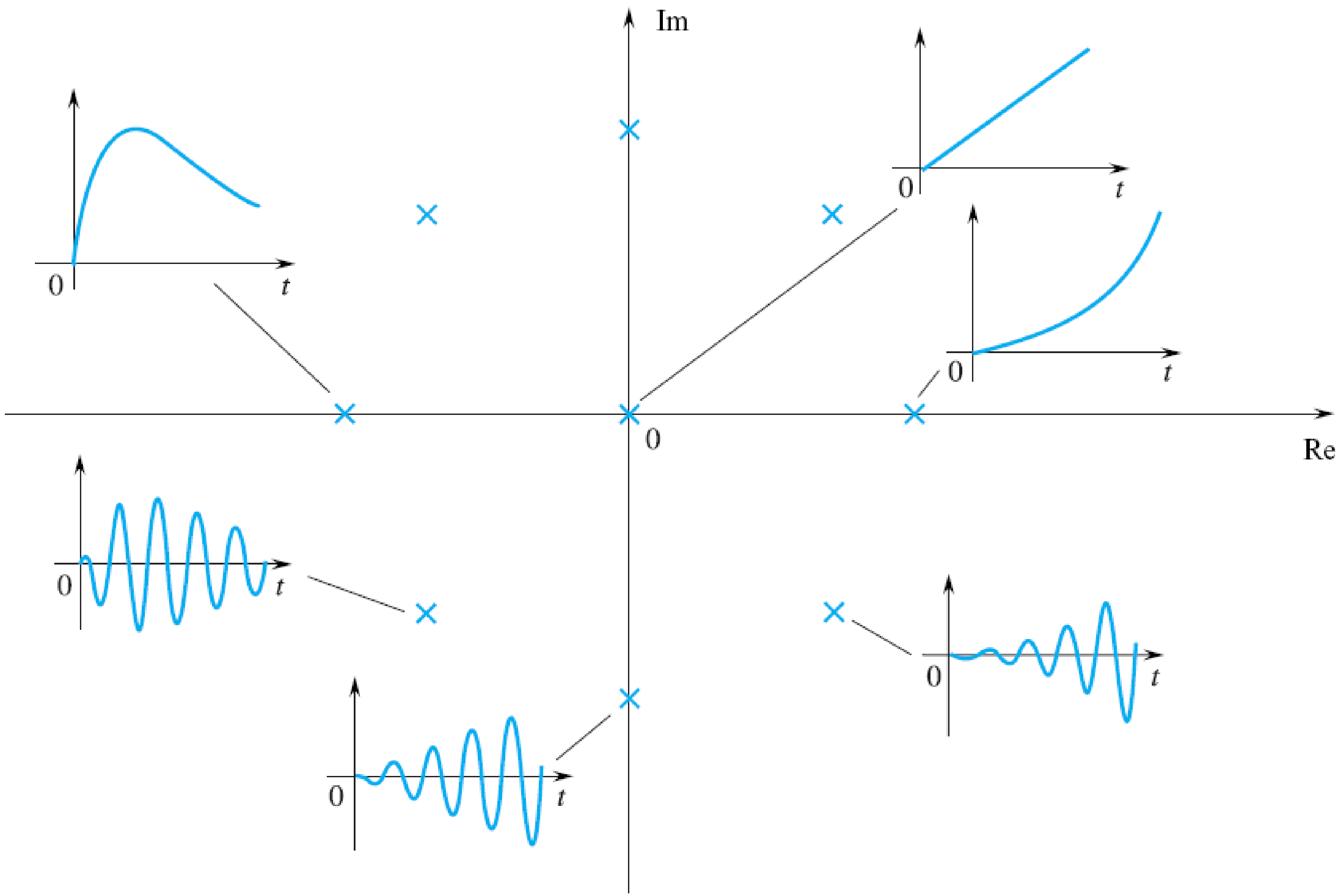
Esponenziale di matrice e *modi*

- I movimenti liberi e forzati sono combinazioni lineari di funzioni esponenziali di base, dette **modi**, il cui andamento dipende dagli **autovalori di A e dalla loro molteplicità**
- Es. con autovalori **singoli**



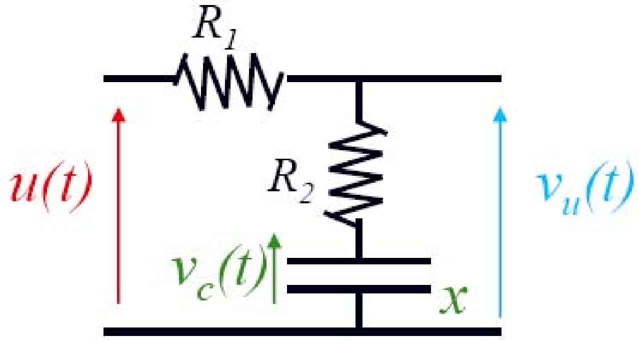
Esponenziale di matrice e *modi*

- Es. con autovalori **doppi**

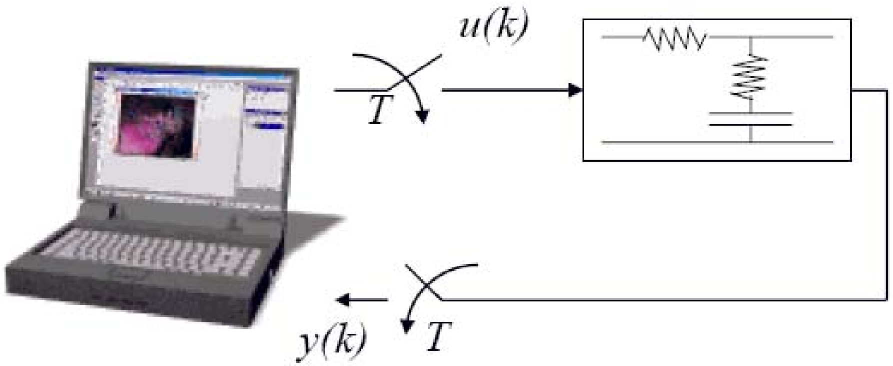


Sistemi a tempo discreto

- Si ottengono ad esempio (**MA NON SOLO**) quando un sistema a tempo continuo viene accoppiato ad un elaboratore digitale

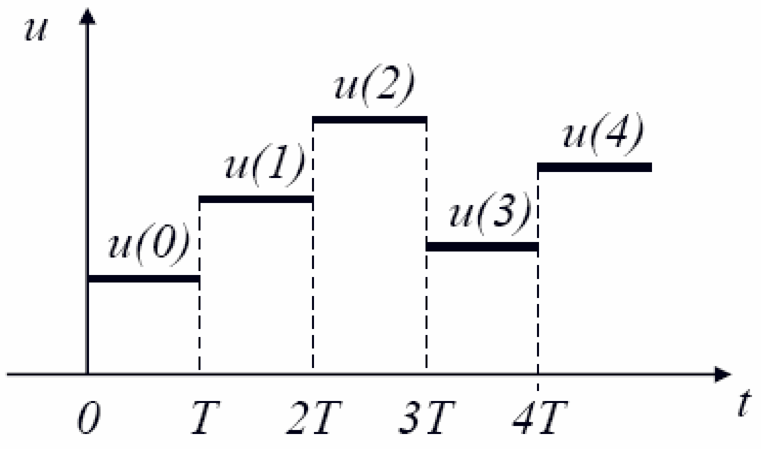


$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= ax(t) + bu(t) \\
y(t) &= cx(t) + du(t)
\end{aligned}
$$



Sistemi a tempo discreto

- Se si considera che all'ingresso venga applicata una funziona costante a tratti e che l'uscita venga campionata negli stessi istanti *kT* in cui l'ingresso varia



$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= a_d x(k) + b_d u(k) \\
y(k) &= c_d x(k) + d_d u(k)
\end{aligned}
$$

$$a_d = e^{aT}; \quad b_d = \int_0^T e^{a(T-\tau)} b\, d\tau$$

$$c_d = c; \quad d_d = d$$

Sistemi a tempo discreto

- In generale, comunque si arrivi al modello MIMO

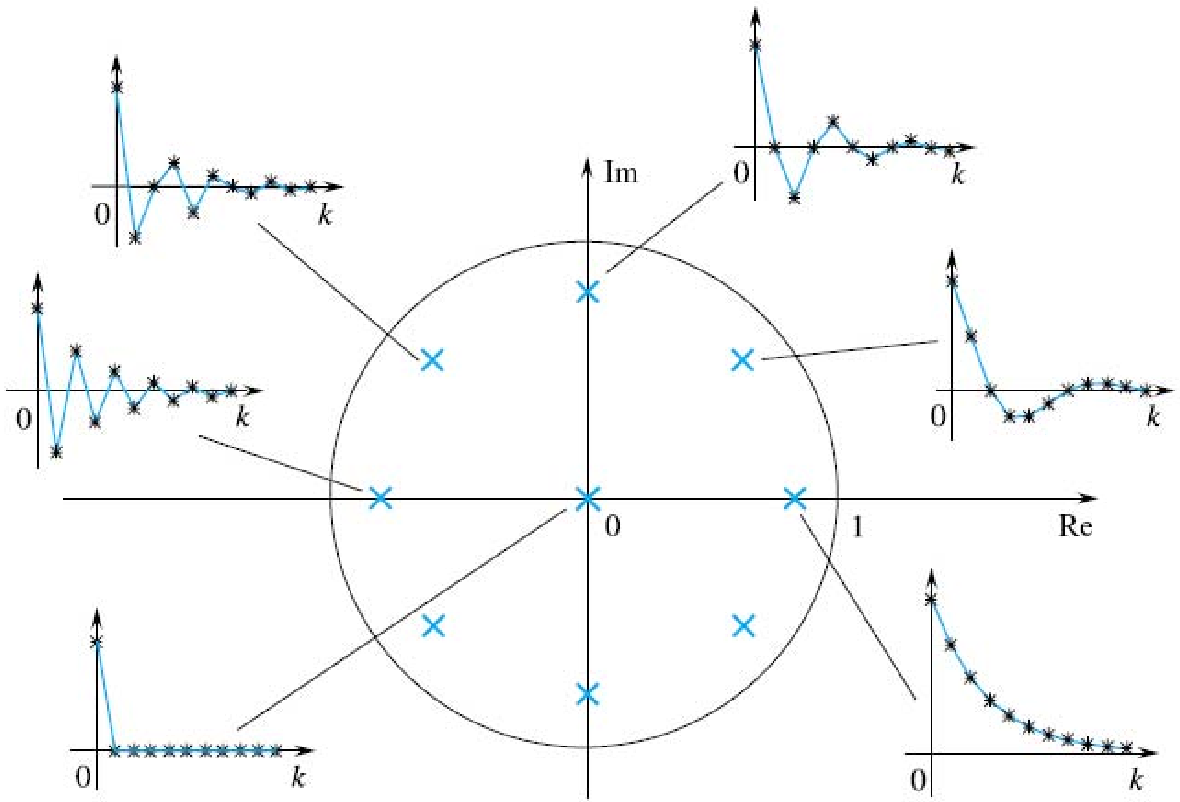
$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k)$$

il movimento si può calcolare direttamente e in modo ancora più intuitivo:

$$x(k) = A_d^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A_d^{k-1-i} B_d u(i)$$

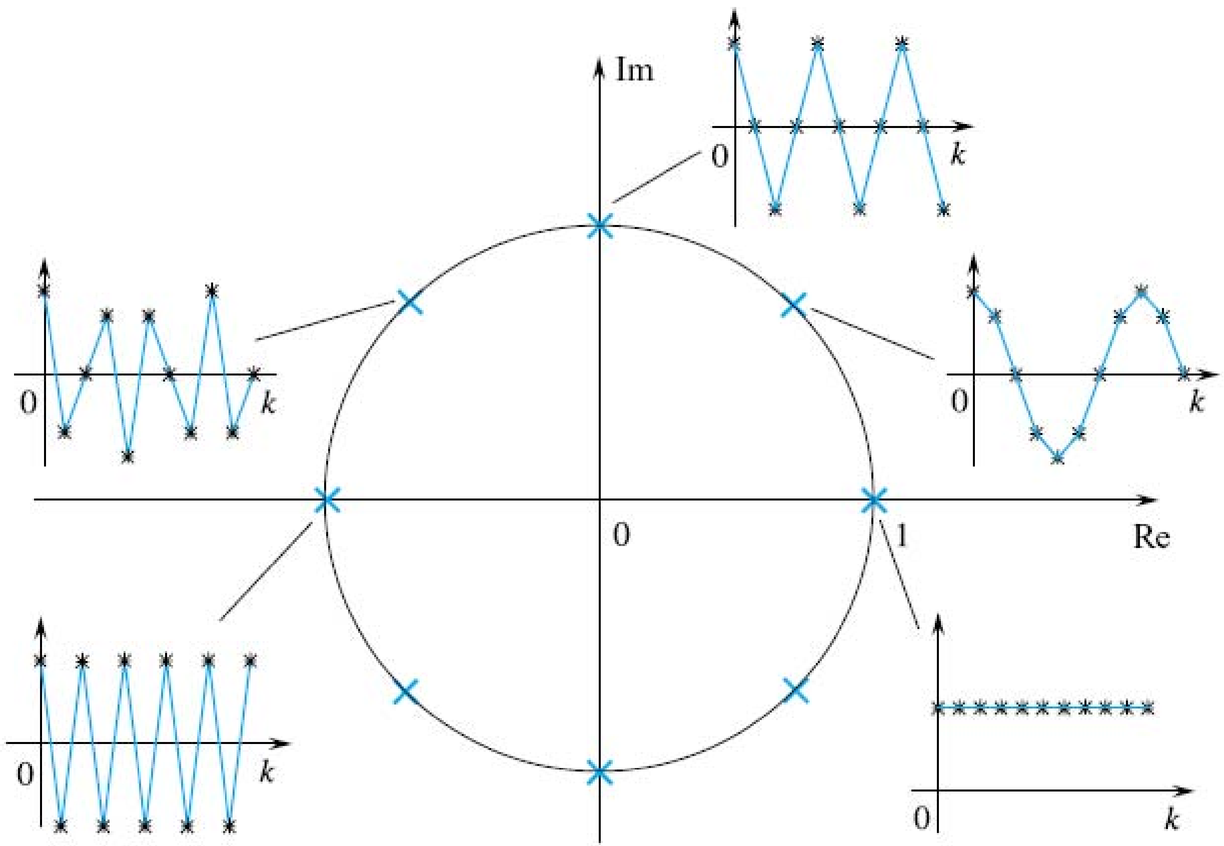
Sistemi a tempo discreto e modi

- Sempre in funzione degli **autovalori di A**, ma... è diversa la relazione con la collocazione sul piano complesso, rispetto al tempo continuo
- Es. con autovalori **singoli ($|\lambda_i|$ < 1)**



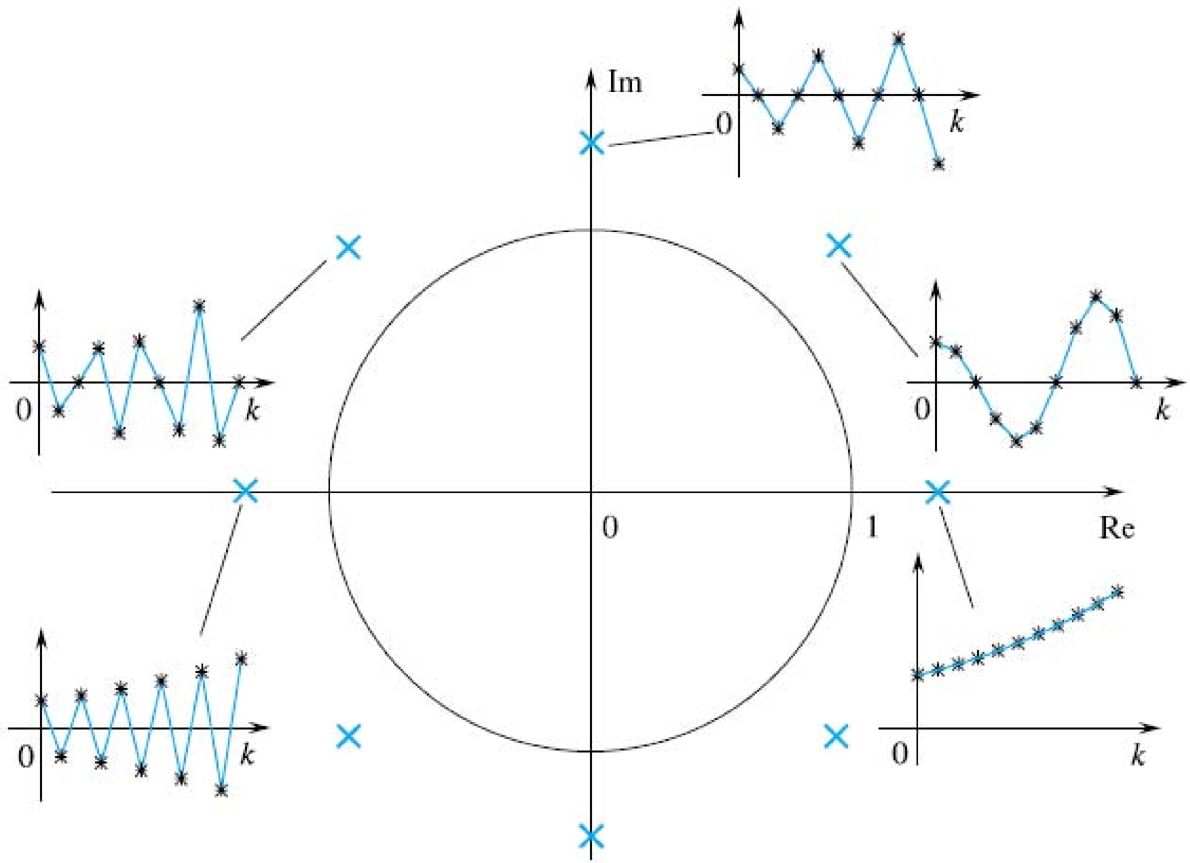
Sistemi a tempo discreto e modi

- Es. con autovalori **singoli ($|\lambda_i|$ = 1)**



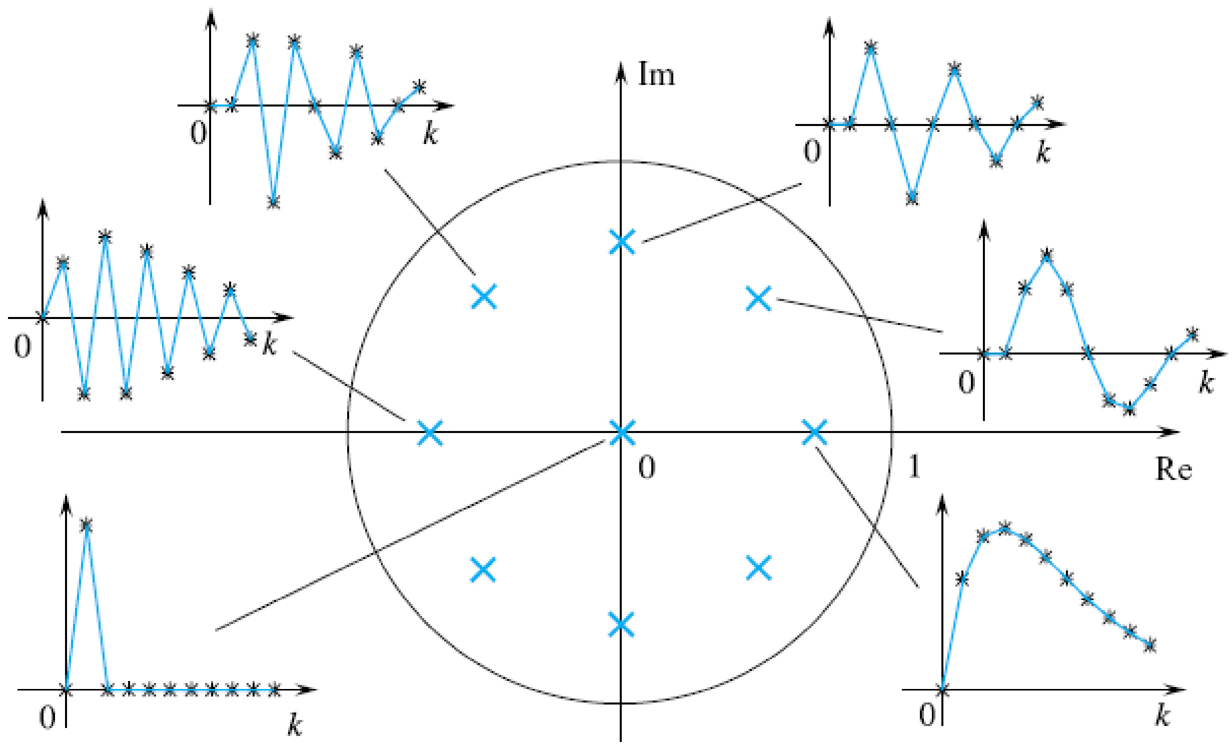
Sistemi a tempo discreto e modi

- Es. con autovalori **singoli ($|\lambda_i| > 1$)**



Sistemi a tempo discreto e modi

- Es. con autovalori **doppi ($|\lambda_i| < 1$)**



Stabilità

- In generale, si analizza la **stabilità dei punti di equilibrio e/o dei movimenti** di un sistema dinamico
- **[DEF.]** Un movimento

$$(t, x(t)) = (t, \phi(t, \bar{t}_0, \bar{x}(\bar{t}_0), \bar{u}(\cdot))$$

si dice semplicemente stabile se $\varepsilon>0$ $\exists$ $\delta > 0$ t.c. $\forall$ $x(t_0)$ che soddisfa la

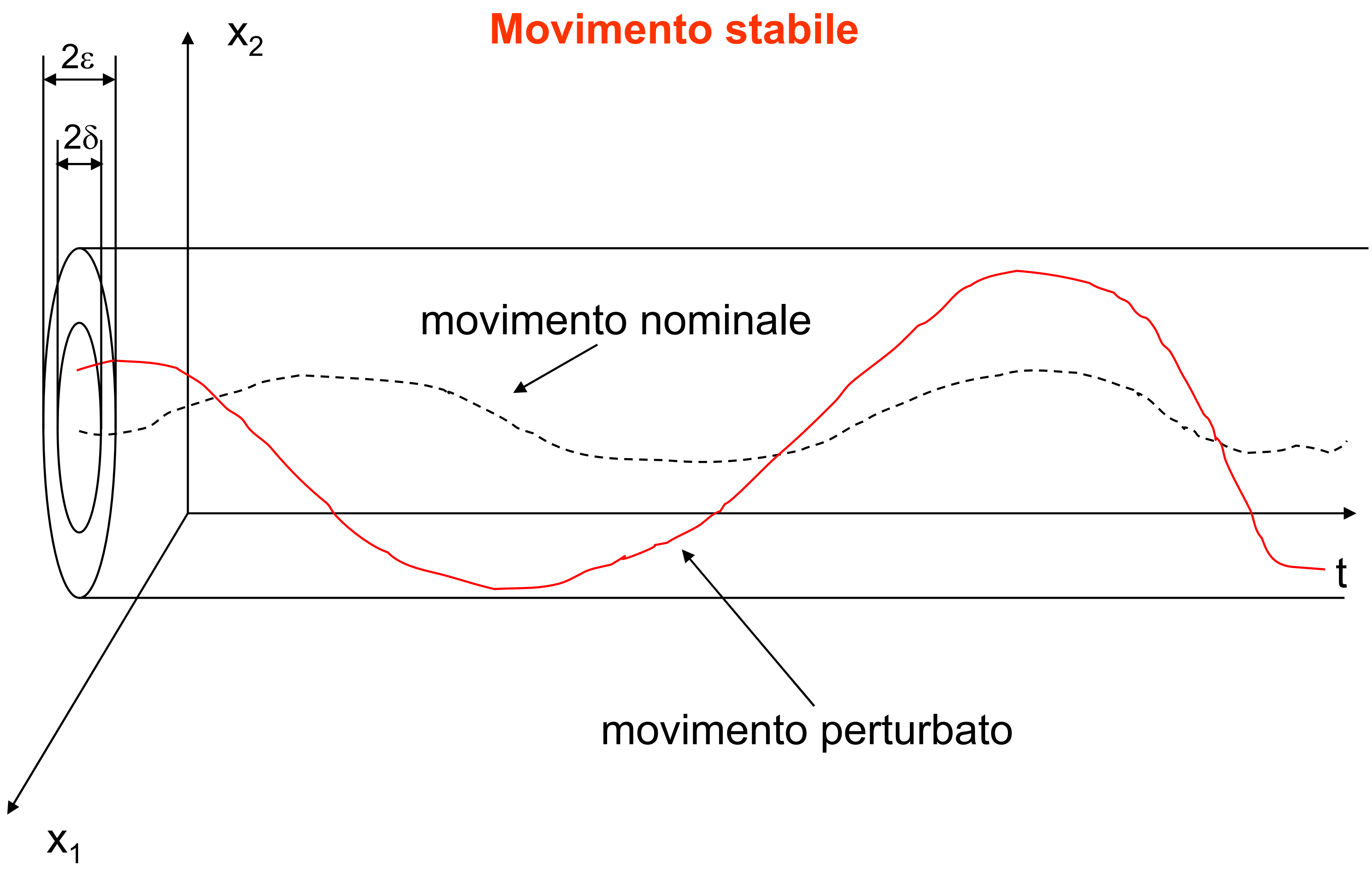
$$\|x(\bar{t}_0) - \bar{x}(\bar{t}_0)\| < \delta$$

si ha $\|\phi(t, \bar{t}_0, \bar{x}(\bar{t}_0), \bar{u}(\cdot)) - \phi(t, \bar{t}_0, x(\bar{t}_0), \bar{u}(\cdot))\| < \varepsilon \qquad \forall t \geq \bar{t}_0$

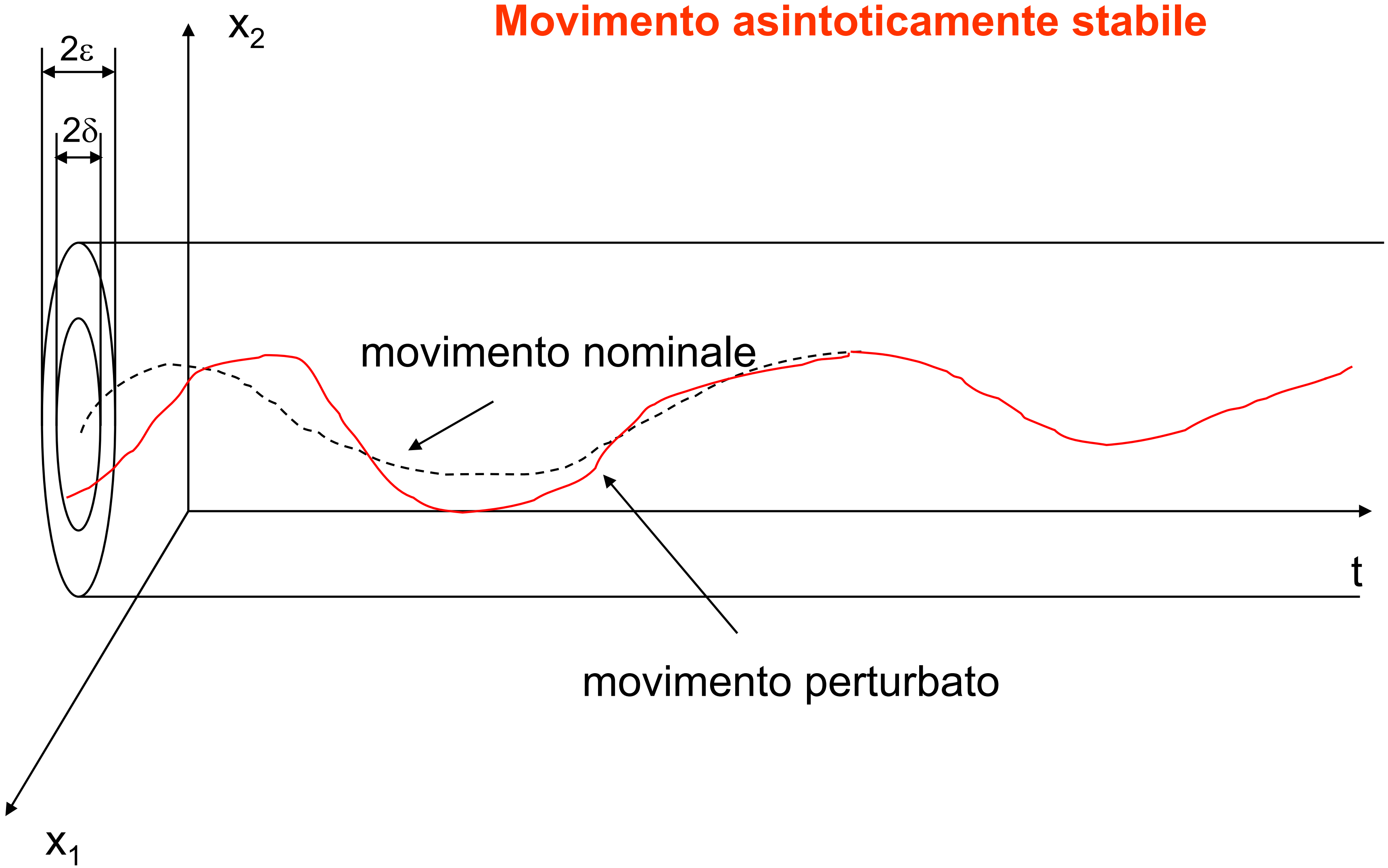
si dice inoltre asintoticamente stabile se è semplicemente stabile e $\lim\limits_{t \to \infty} \|\phi(t, \bar{t}_0, \bar{x}(\bar{t}_0), \bar{u}(\cdot)) - \phi(t, \bar{t}_0, x(\bar{t}_0), \bar{u}(\cdot))\| = 0$

altrimenti, si dice instabile

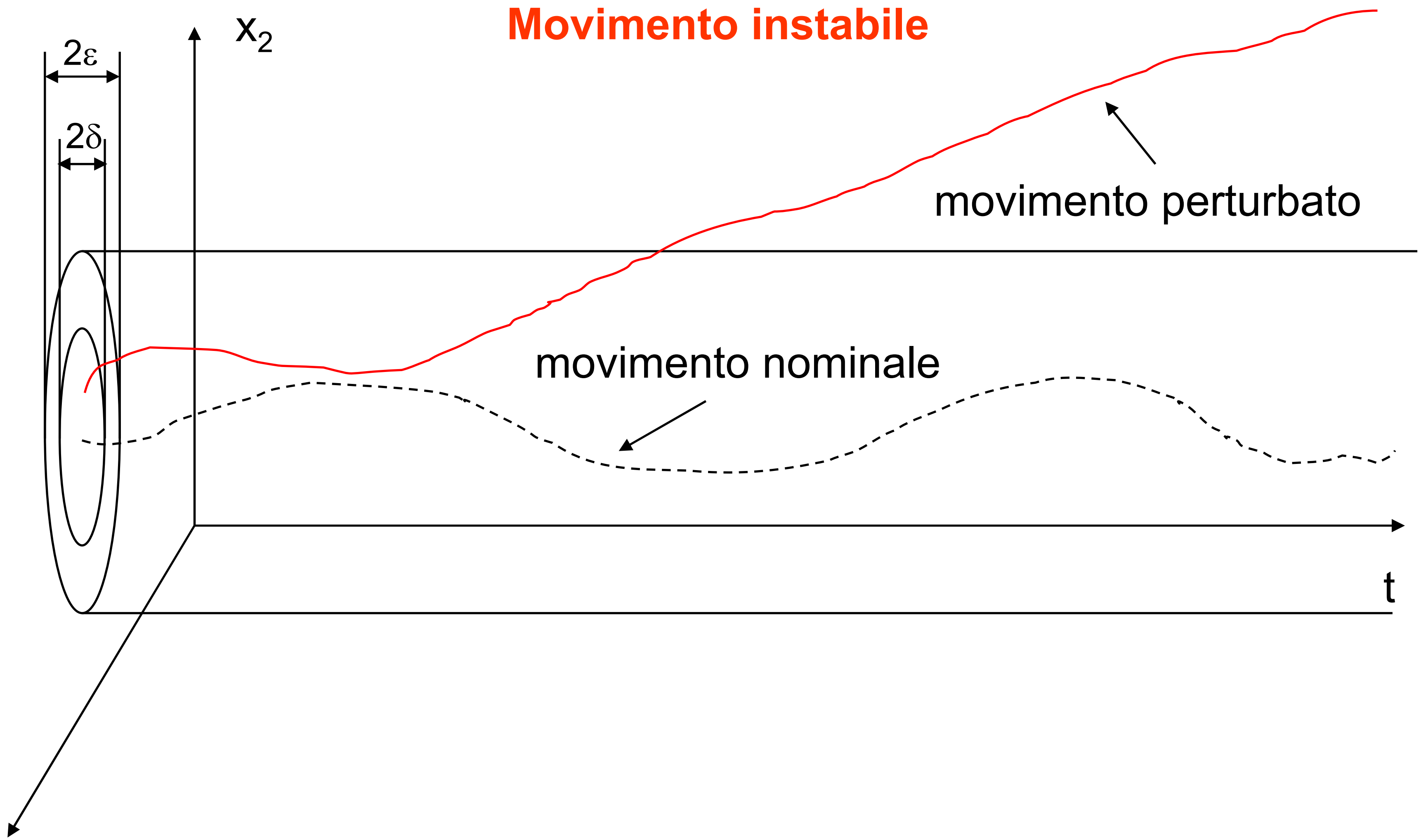
Stabilità: interpretazione geometrica



Stabilità: interpretazione geometrica



Stabilità: interpretazione geometrica



Stabilità e sistemi lineari stazionari (LTI)

- Per i sistemi LTI si può parlare di **stabilità del sistema** e non dei singoli punti di equilibrio o movimenti
- Se A è invertibile, il punto di equilibrio è unico

$$A\bar{x} + B\bar{u} = 0 \;\Rightarrow\; \bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$$

- L'unico movimento di interesse per la stabilità è il movimento libero, le cui caratteristiche dipendono solo dagli autovalori di A (e che **NON** dipendono dalla rappresentazione)

Stabilità e sistemi lineari stazionari (LTI)

- [TEOR.] Un sistema LTI tempo-continuo è asintoticamente stabile se e solo se tutti i suoi autovalori hanno parte reale negativa

- [TEOR.] Un sistema LTI tempo-discreto è asintoticamente stabile se e solo se tutti i suoi autovalori hanno modulo minore di 1

Raggiungibilità e Controllabilità

- **Obiettivo** dell'analisi: comprendere le possibilità di intervento su un sistema tramite l'azione di controllo (dualmente: stima tramite osservazioni)
- Tali proprietà del sistema sono **strutturali:**
  - **NON** dipendono dalla rappresentazione
  - **NON** sono modificabili tramite il controllo
- **Raggiungibilità / Controllabilità:**
  - Applicazione diretta: pianificazione dell'azione di controllo in catena aperta
  - Conseguenze: proprietà in catena chiusa

Raggiungibilità (da $x(t_0)=x_0$ a ?)

[Def.1]: Lo stato x_1 di un sistema dinamico è **raggiungibile** da x_0 nell'intervallo di tempo $[t_0,t_1]$ (con $t_0<t_1$) se esiste una funzione di ingresso ammissibile $u(.) \in \Omega$ tale che:

$$x_1 = x(t_1) = \phi(t_1, t_0, \underbrace{x(t_0)}_{x_0}, u(\cdot))$$

L'insieme degli stati raggiungibili all'istante t_1 a partire dall'evento (t_0,x_0) è indicato con

$$\mathcal{R}^+(t_0,t_1,x_0)$$

Controllabilità (da ?? a $x(t_1)=x_1$)

[Def.2]: Lo stato x_0 di un sistema dinamico è **controllabile** a x_1 nell'intervallo di tempo $[t_0,t_1]$ (con $t_0<t_1$) se esiste una funzione di ingresso ammissibile $u(.) \in \Omega$ tale che:

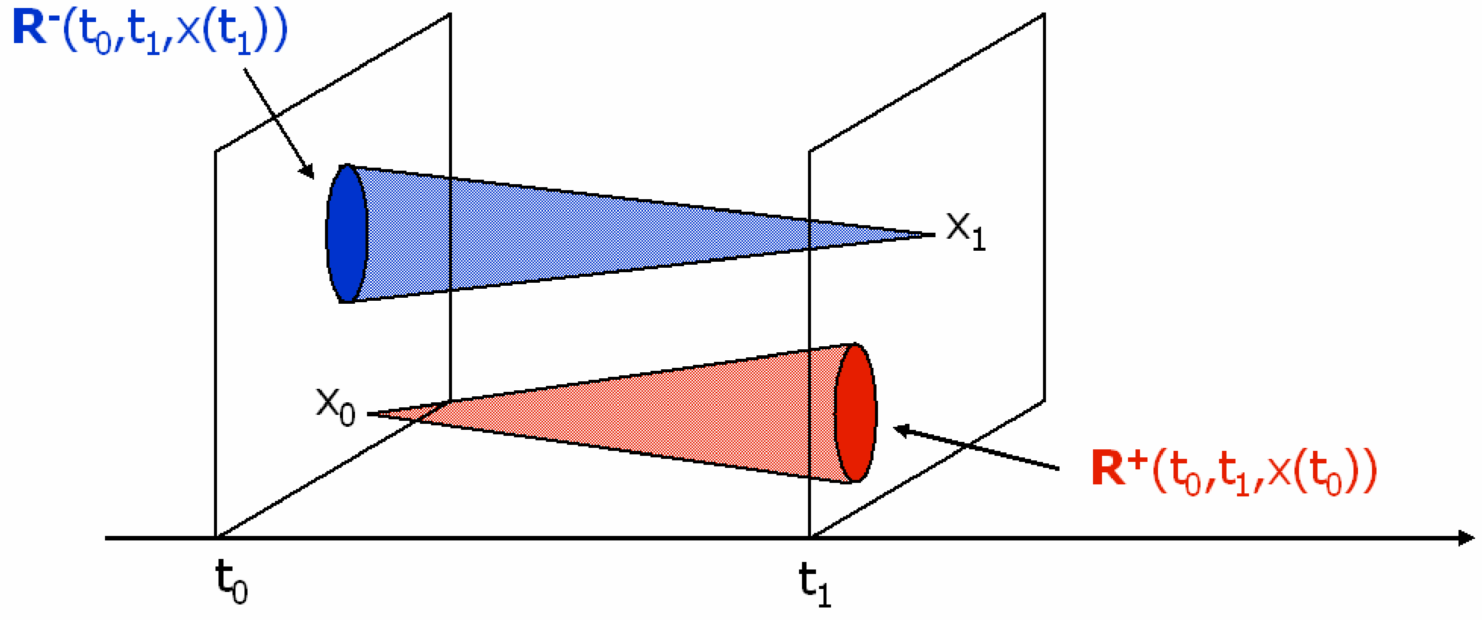
$$x_1 = x(t_1) = \phi(t_1, t_0, \underbrace{x(t_0)}_{x_0}, u(\cdot))$$

L'insieme degli stati controllabili all'evento (t_1,x_1) a partire dall'istante t_1 è indicato con

$$\mathcal{R}^-(t_0,t_1,x_1)$$

Raggiungibilità e Controllabilità

Concetti complementari:



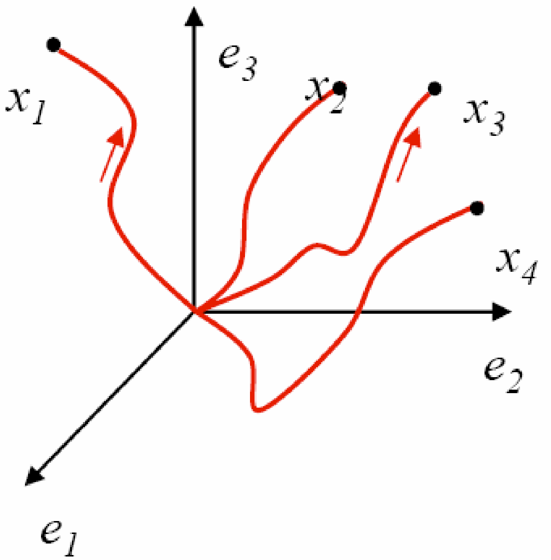
NOTA: per i sistemi lineari tempo-invarianti (LTI), tali proprietà non dipendono da t_0 e t_1 ma solo da $t=t_1-t_0$ e si può considerare $x = 0$ come unico punto di interesse

Raggiungibilità e Controllabilità complete

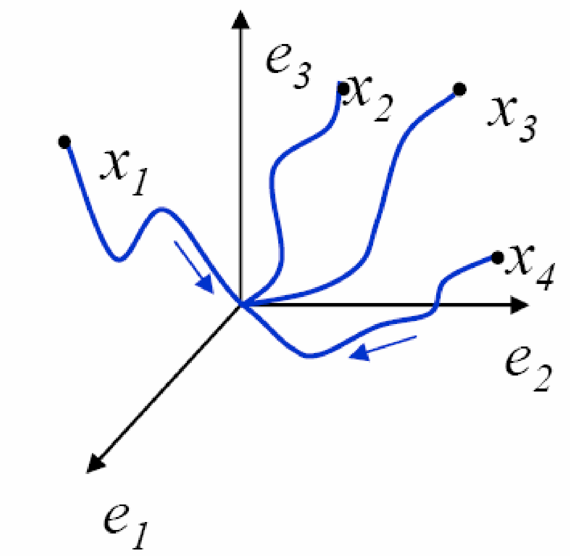
- Il sistema MIMO LTI t.continuo [t.discreto]

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad [x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)]$$

È completamente raggiungibile se qualunque stato può essere raggiunto da x=0 in un tempo finito



È completamente controllabile se x=0 può essere raggiunto da qualunque stato in t finito



Raggiungibilità e risposta forzata

- La possibilità di considerare x=0 come unico punto di interesse nei sistemi LTI lega la raggiungibilità unicamente alla risposta forzata:

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

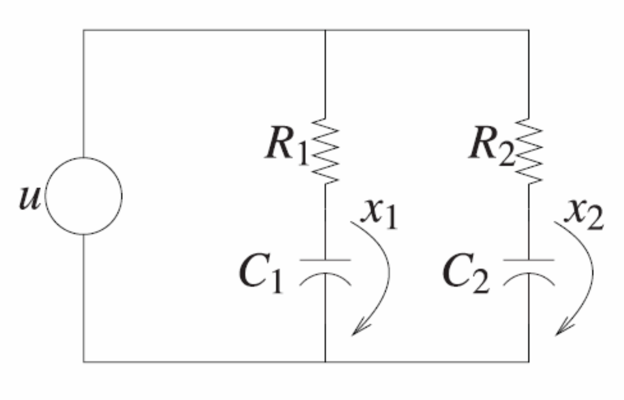
TEMPO CONTINUO

$$x(k) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} B u(i)$$

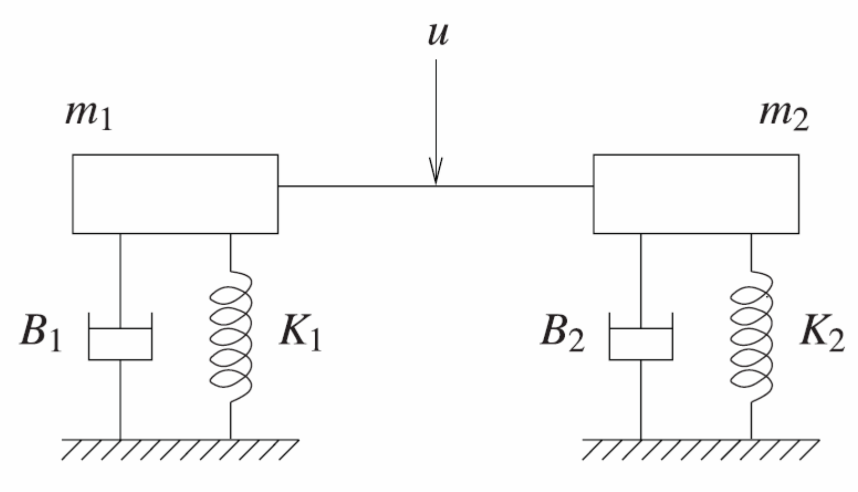
TEMPO DISCRETO

Esempi fisici

1) se $1/(R_1 * C_1 = 1/(R_2 * C_2)$



2) ancora un parallelo…



Esempi fisici

1) $$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1C_1} \\ \frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} u(t)$$

fissando $\omega = 1/(R_1{*}C_1 = 1/(R_2{*}C_2)$ e partendo dall'origine

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \alpha(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \alpha(t) := \omega \int_0^t e^{-\omega(t-\tau)} u(\tau) d\tau$$

per cui è impossibile portare l'origine verso qualunque condizione in cui $x_1(t) \neq x_2(t)$

2) considerazioni analoghe…

Raggiungibilità dei sistemi LTI t.discreti

- Insieme di stati raggiungibili in *k* passi per:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad x(0) = 0$$

$$\begin{aligned}
x(1) &= Bu(0) \\
x(2) &= Ax(1) + Bu(1) = ABu(0) + Bu(1) \\
x(3) &= Ax(2) + Bu(2) = A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2) \\
&\dots \\
x(k) &= \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}Bu(i) = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \dots A^{k-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

- Perciò: $\mathcal{R}_k^+(0) = im\{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \dots A^{k-1}B \end{bmatrix}\}$

  = **sottospazio stati raggiungibili** in *k* passi

Esempi

3) $$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$\mathcal{R}_k^+(0) = im\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_3 & \dots & a_3^{k-1} \end{bmatrix}\} = span\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$$

4) Idem, ma con $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\mathcal{R}_2^+(0) = im\{\begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}\} = \mathbb{R}^2$$

Sottospazio raggiungibile

- I sottospazi raggiungibili in 1,2,n passi soddisfano:

$$\mathcal{R}_1^+(0) \subseteq \mathcal{R}_2^+(0) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{R}_n^+(0) \subseteq \mathbb{R}^n$$

- Per un numero di passi k ≥n, applicando il **Teorema di Cayley-Hamilton**:

$$\mathcal{R}_n^+(0) = \mathcal{R}_{n+1}^+(0) := \mathcal{R}^+(0)$$

e si definisce il **sottospazio raggiungibile**

$$\mathcal{R}^+(0) = im\{\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \dots A^{n-1}B \end{bmatrix}\}$$

Teorema di Cayley-Hamilton

- Data la matrice A nxn e il polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det(\lambda I - A) \\ &= \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n \end{aligned}$$

la matrice A è tale che

$$p(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

- Come conseguenza:

$$A^n = -a_1 A^{n-1} - \cdots - a_n$$

Matrice di raggiungibilità

- Poiché il sottospazio raggiungibile è:

$$\mathcal{R}^+(0) = im\{[B \quad AB \quad A^2B \ldots A^{n-1}B]\}$$

si definisce **matrice di raggiungibilità:**

$$P^+ = [B \quad AB \quad A^2B \ldots A^{n-1}B]$$

- Il sistema è **completamente raggiungibile** $(\mathcal{R}^+(0) = \mathbb{R}^n)$ se e solo se:

$$rank(P^+) = n$$

Raggiungibilità come proprietà strutturale

- Come detto, sistemi equivalenti, per i quali cioè:

$$
\begin{aligned}
\bar{A} &= T^{-1}AT \\
\bar{B} &= T^{-1}B
\end{aligned}
$$

hanno le stesse proprietà di raggiungibilità:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathcal{R}}_k^{+}(0) &= im\{[\bar{B} \quad \bar{A}\bar{B} \quad \bar{A}^2\bar{B} \dots \bar{A}^{k-1}\bar{B}]\} \\
&= im\{T^{-1}[B \quad AB \quad A^2B \dots A^{k-1}B]\} \\
&= T^{-1}\mathcal{R}_k^{+}(0)
\end{aligned}
$$

per cui tali sottospazi hanno la stessa dimensione

Controllabilità dei sistemi LTI t.discreti

- Si consideri ancora $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$
  con l'obiettivo di controllare (a 0) un certo x(0) $\neq$ 0,
  in k passi:

$$0 = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i) \quad \Rightarrow \quad -A^k x(0) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i} Bu(i)$$

➔ x(0) $\neq$ 0 è controllabile in k passi se $-A^k x(0)$
è raggiungibile in k passi

$$A^k x(0) \in im\{ \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B \dots A^{k-1} B \end{bmatrix} \} = \mathcal{R}_k^+(0)$$

Sottospazio controllabile

- Il **sottospazio controllabile** in k passi è pertanto:

$$\mathcal{R}_k^-(0) = \{x : A^k x \in \mathcal{R}_k^+(0)\}$$

- Il sistema è **controllabile** *in k passi* se vale la relazione di inclusione precedente per l'intero spazio degli stati, cioè:

$$im\{A^k\} \subseteq \mathcal{R}_k^+(0)$$

- Il sistema è **completamente controllabile** se l'intero spazio degli stati è controllabile in k passi per qualche k

Controllabilità in n passi

- In realtà, **il sistema è controllabile se e solo se è controllabile in n passi**:

$$im\{A^n\} \subseteq \mathcal{R}^+(0)$$

- Se il sistema è controllabile in k passi con k $\leq$ n, si può infatti scegliere u(k)=u(k+1)=..=u(n-1)=0
- Se invece k > n, si ha sempre che

$$im\{A^n\} = im\{A^k\}$$

Controllabilità “contro” raggiungibilità

- Per sistemi LTI t.discreti fin qui trattati, le due proprietà **NON** sono equivalenti:
  - raggiungibilità $\Rightarrow$ controllabilità

    (se $\mathcal{R}^+(0) = \mathbb{R}^n$ ovviamente $im\{A^n\} \subseteq \mathcal{R}^+(0)$)
  - controllabilità $\not\Rightarrow$ raggiungibilità

    Es. se A = 0 e rank(B)<n, si ha controllabilità

    ($im\{A^n\} = \{0\} \subseteq im\{[B \quad AB \quad A^2B \ldots A^{n-1}B]\}$)

    ma non raggiungibilità: $rank([B \quad 0 \ldots 0]) < n$
- **Sono equivalenti** se e solo se A è **non singolare**

Raggiungibilità dei sistemi LTI t.continui

- Per $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ uno stato x(t) è **raggiungibile** al tempo t se esiste una funzione di ingresso ammissibile u(.)$\in \Omega$ tale che:

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)d\tau$$

- Definendo l'operatore lineare $R_t : \Omega \rightarrow X$

$$R_t : u(\cdot) \rightarrow \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)d\tau$$

x(t) è raggiungibile al tempo t se e solo se

$$x(t) \in imR_t$$

pertanto il **sottospazio raggiungibile** al tempo t:

$$\mathcal{R}_t^{+}(0) = imR_t$$

Sottospazio raggiungibile e dipendenza da t

- Se gli elementi del vettore di ingresso possono **assumere valori arbitrariamente grandi,** il sottospazio raggiungibile non dipende da t
- Ciò è conseguenza del teorema che afferma:

  Il sottospazio raggiungibile al tempo t>0 è l'immagine della **matrice di raggiungibilità:**

$$P^{+} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \dots A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

- Il sistema è quindi **completamente raggiungibile** se $im\{P^{+}\} = \mathbb{R}^n$

Controllabilità dei sistemi LTI t.continui

- Per $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ uno stato x(0) è **controllabile** (a 0) al tempo t se esiste una funzione di ingresso ammissibile u(.) $\in \Omega$ tale che:

$$0 = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

ovvero $-x(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$

perciò l'insieme degli stati controllabili al tempo t è un sottospazio $\mathcal{R}_t^-(0)$ tale che:

$$e^{At}\mathcal{R}_t^-(0) \subseteq im\{R_t\} = \mathcal{R}^+(0)$$

Controllabilità “contro” raggiungibilità

- La relazione di inclusione precedente è valida anche in senso inverso, inoltre per l’invertibilità dell’esponenziale di matrice:

$$\mathcal{R}_t^{-}(0) = \mathcal{R}^{+}(0)$$

  il che significa anche che il sottospazio controllabile **non dipende** da t!

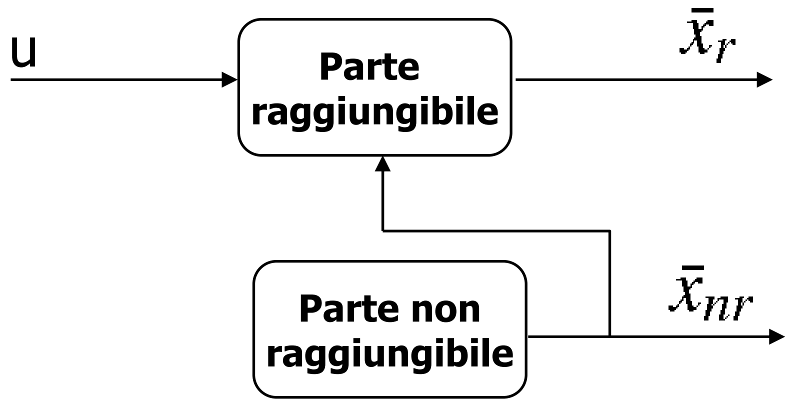
- Pertanto, nei sistemi LTI t.continui, a differenza di quelli t.discreti:

raggiungibilità $\Leftrightarrow$ **controllabilità**

Forma canonica di raggiungibilità: scomposizione

- Se il sistema non è completamente raggiungibile, è sempre possibile (e comodo per alcune analisi) trasformare il sistema in

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_r \\ \dot{\bar{x}}_{nr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_r \\ \bar{x}_{nr} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$



Considerazioni "applicative"

- Le proprietà analizzate permettono di progettare leggi di controllo in **catena aperta**, ma a **minima energia** (es. per sistemi t.discreto, basate sulla (pseudo)inversa della matrice P^+)
- Nel progetto di controllo in **catena chiusa** (es. retroazione dello stato), occorre considerare che il controllore non è in grado di agire sulla parte non raggiungibile del sistema (qualora sia presente).
- Se la parte non raggiungibile è stabile, allora il sistema è (almeno..) **stabilizzabile**

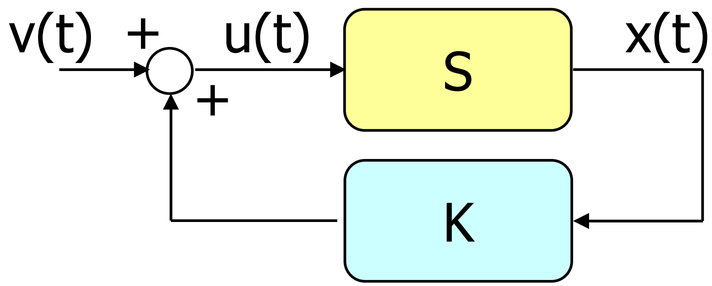
Controllo in retroazione e stabilizzabilità

- Infatti, dato un sistema LTI completamente raggiungibile

$$S = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

e ipotizzando che *x* sia completamente **misurabile,** la legge di controllo con retroazione dello stato

$$u(t) = Kx(t) + v(t)$$



con dim(K) = m x n, permette di modificare arbitrariamente gli autovalori del sistema

Controllo in retroazione e stabilizzabilità

- Il sistema in catena chiusa diventa infatti

$$S_K = \begin{cases} \dot{x}(t) = (A+BK)x(t) + Bv(t) \\ \\ y(t) = (C+DK)x(t) + Dv(t) \end{cases}$$

  i cui autovalori sono ovviamente quelli di A+BK

- ATTENZIONE: se il sistema NON è completamente raggiungibile, è possibile modificare SOLO gli autovalori della parte raggiungibile
- Se gli autovalori della parte NON raggiungibile sono a parte reale negativa, il sistema (come detto) viene definito **stabilizzabile**

Osservabilità ($x(t_0)=x_0$ e u(.)/y(.))

- **[Def.3]:** Lo stato x_0 di un sistema dinamico è **compatibile** con le funzioni di ingresso u(.) e uscita y(.) nell'intervallo di tempo $[t_0,t_1]$ ($t_0<t_1$) se:

$$y(\tau) = \eta(\tau, t_0, \underbrace{x(t_0)}_{x_0}, u(\cdot)) \qquad \forall \tau \in [t_0, t_1]$$

L'insieme degli stati iniziali compatibili con u(.) e y(.) nell'intervallo $[t_0,t_1]$ è indicato con

$$\mathcal{E}^{-}(t_0,t_1,u(.),y(.))$$

Ricostruibilità ($x(t_1)=x_1$ e u(.)/y(.))

- **[Def.4]:** Lo stato x_1 di un sistema dinamico è **compatibile** con le funzioni di ingresso u(.) e uscita y(.) nell'intervallo di tempo $[t_0,t_1]$ ($t_0<t_1$) se:

$$x(t_1) = x_1 = \phi(t_1, t_0, x(t_0), u(\cdot)) \qquad x(t_0) \in \mathcal{E}^-(t_0, t_1, u(\cdot), y(\cdot))$$

L'insieme degli stati finali compatibili con u(.) e y(.) nell'intervallo $[t_0,t_1]$ è indicato con

$$\mathcal{E}^+(t_0,t_1,u(.),y(.))$$

Indistinguibilità tra due stati x' e x''

- **[Def.5]:** Due stati x' e x'' sono **indistinguibili nel futuro** nell'intervallo di tempo $[t_0,t_1]$ $(t_0<t_1)$ se per tutte le funzioni di ingresso $u(.) \in \Omega$:

$$\eta(t,\phi(t,t_0,x',u(\cdot)),u(\cdot)) = \eta(t,\phi(t,t_0,x'',u(\cdot)),u(\cdot)) \quad \forall t \in [t_0,t_1]$$

Un sistema è **completamente osservabile** in $[t_0,t_1]$ se l'insieme degli stati iniziali compatibili con u(.) e y(.) comprende un solo elemento per ogni $u(.) \in \Omega$ e per ogni $y(.) \in \Gamma(t_0,u(.))$

Osservabilità (indistinguibilità) e risposta libera

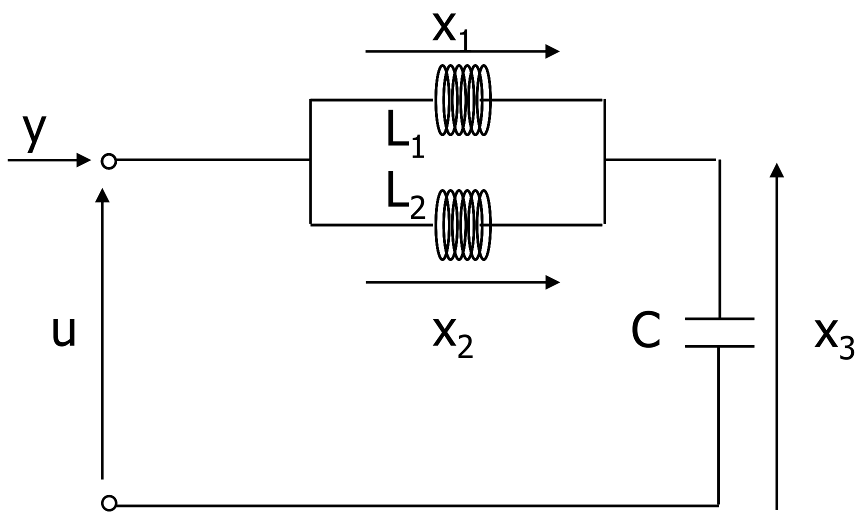
- Nei sistemi LTI, è possibile:
  - considerare solo sistemi puramente dinamici
  - considerare solo $t=t_1-t_0$
  - considerare solamente la risposta libera per valutare l'indistinguibilità, poiché:

$$\eta(t,\phi(t,t_0,x',u(\cdot))) = \eta(t,\phi_l(t,t_0,x')) + \eta(t,\phi_f(t,t_0,u(\cdot))$$

$$\eta(t,\phi(t,t_0,x'',u(\cdot))) = \eta(t,\phi_l(t,t_0,x'')) + \eta(t,\phi_f(t,t_0,u(\cdot))$$

Sistemi non osservabili

- Es.3 (ancora un parallelo..)



Qualunque stato iniziale con $x_1+x_2=0$ è indistinguibile dall'origine dello spazio degli stati

Indistinguibilità nei sistemi LTI t.discreti

- Due stati x' e x'' sono **indistinguibili nel futuro** *in k passi* se per ogni successione di ingresso:

  $$u(0), u(1), u(2), \ldots, u(k-1)$$

  le successioni di uscita y' e y'', corrispondenti agli stati iniziali x' e x'', coincidono per i primi k passi, vale a dire:

  $$CA^i x' = CA^i x'' \qquad 0 \leq i \leq k$$

  condizione che si può scrivere anche come:

  $$(x' - x'') \in ker\{\begin{bmatrix} C & CA & CA^2 \ldots CA^k \end{bmatrix}^T\}$$

Indistinguibilità nei sistemi LTI t.discreti - 1

- Due stati x' e x'' sono **indistinguibili nel futuro** se lo sono in k passi per ogni k
- Per il teorema di Cayley-Hamilton:

$$ker\{\begin{bmatrix} C & CA & CA^2 \ldots CA^k \end{bmatrix}^T\} = ker\{\begin{bmatrix} C & CA & CA^2 \ldots CA^{n-1} \end{bmatrix}^T\}$$

per k $\geq$ n-1, pertanto l'indistinguibilità nel futuro fra due stati x' e x'' è collegata unicamente alla matrice

$$\begin{bmatrix} C & CA & CA^2 \ldots CA^{n-1} \end{bmatrix}^T$$

Sottospazio non osservabile

- Se consideriamo l'indistinguibilità da 0 (in k passi o per estensione analoga alla precedente, per qualunque k), si definisce la condizione di **non osservabilità** di uno stato x come:

$$x \in ker\{[C \quad CA \quad CA^2 \ldots CA^{n-1}]^T\}$$

- La matrice: $O^- = [C \quad CA \quad CA^2 \ldots CA^{n-1}]^T$
  è detta **matrice di osservabilità** e $\mathcal{E}^- = ker\{O^-\}$ **sottospazio non osservabile** del sistema

Osservabilità

- Se il sottospazio non osservabile contiene solo 0:

$$ker\{O^-\} = \{0\}$$

allora il sistema si dice **osservabile**

- Ciò naturalmente equivale anche a testare:

$$rank\{O^-\} = n$$

- Vedi considerazioni sul sottospazio di non raggiungibilità…

Indistinguibilità nei sistemi LTI t.continui

- Analogamente al caso t.discreto, due stati x' e x'' sono indistinguibili nel futuro nell'intervallo [0,t] se (e solo se): $$Ce^{A\tau}x' = Ce^{A\tau}x'' \qquad \forall \tau \in [0,t]$$

- Definendo l'operatore lineare:
$$O_t : \mathbf{X} \rightarrow \Gamma(0,t) \qquad O_t : x \rightarrow y_l(\tau) = Ce^{A\tau}x \quad \tau \in [0,t]$$
allora uno stato x è indistinguibile da 0 (non osservabile) se: $x \in \ker O_t$

Test di osservabilità per sistemi LTI t.continui

- Si può dimostrare che anche per un sistema LTI t.continuo:

  Il sottospazio non osservabile in [0,t] è (per ogni t>0) il nucleo della **matrice di osservabilità:**

$$O^{-} = \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & \dots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^T$$

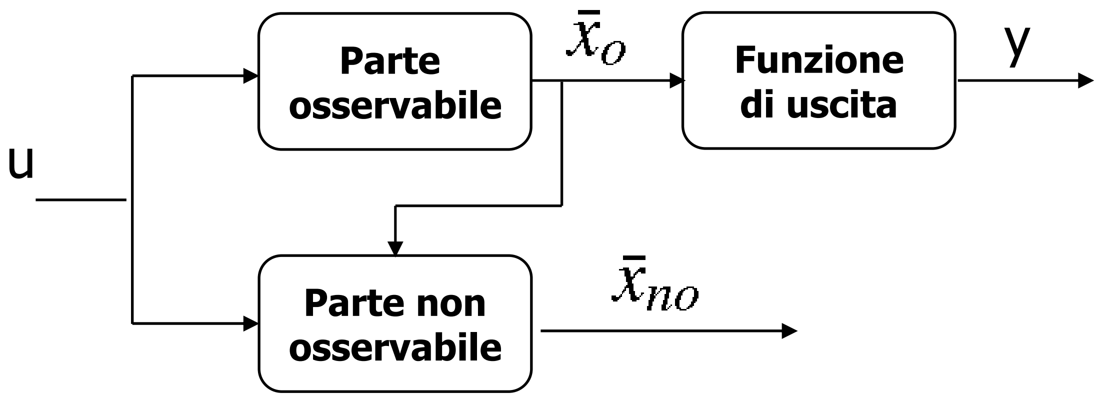
e il sistema è **osservabile** se:

$$ker\{O^{-}\} = \{0\} \qquad\qquad rank\{O^{-}\} = n$$

Forma canonica di osservabilità: scomposizione

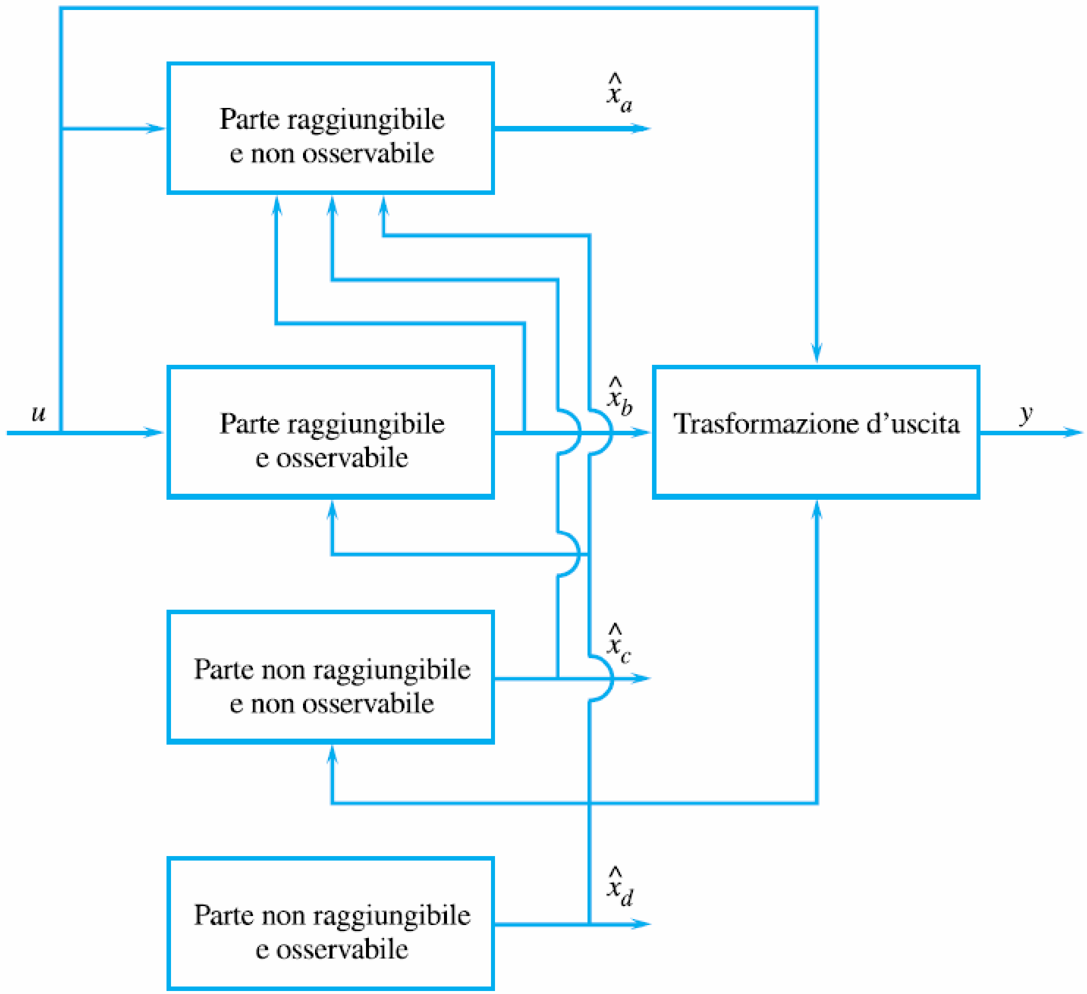
- Se il sistema non è completamente osservabile, è sempre possibile (e comodo per alcune analisi) trasformare il sistema in

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_o \\ \dot{\bar{x}}_{no} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{x}_{no} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} \bar{C}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{x}_{no} \end{pmatrix} \end{cases}$$



Scomposizione canonica

- Unendo le due trasformazioni viste



Dualità

- I risultati ottenuti dalle analisi di raggiungibilità e osservabilità mostrano notevoli analogie.
- Per formalizzare tali analogie, si usa ricorrere alla definizione di **dualità** (qui nel caso LTI t. continuo)
- Dato:

$$S = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

si definisce **sistema duale**:

$$S_D = \begin{cases} \dot{x}(t) = A^T x(t) + C^T u(t) \\ y(t) = B^T x(t) + D^T u(t) \end{cases}$$

Dualità - 1

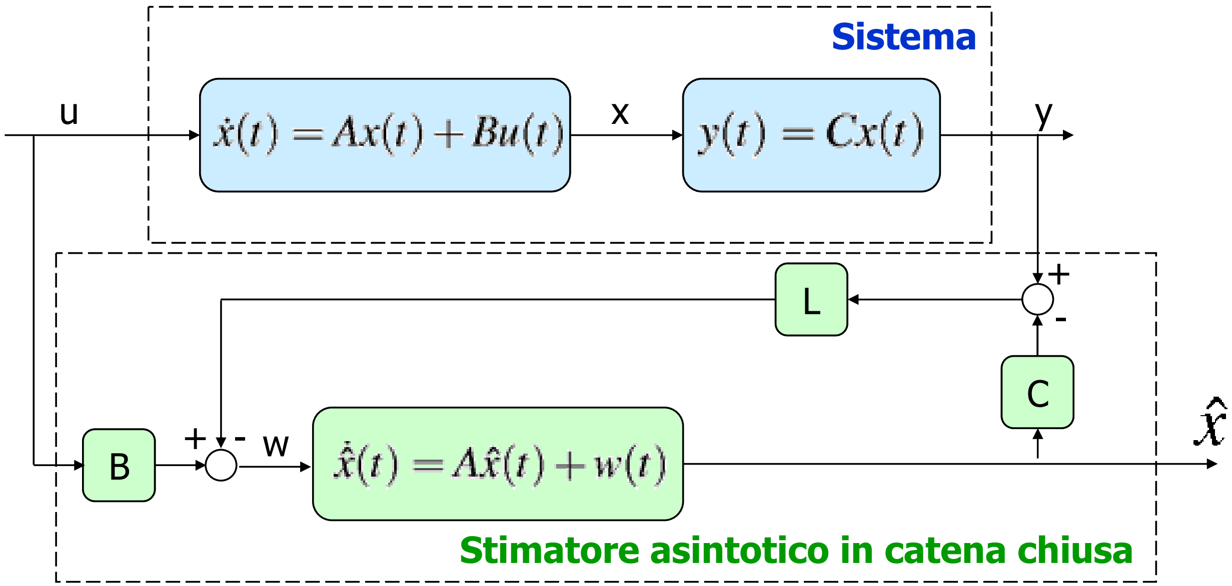
- Il numero di ingressi (uscite) di S corrisponde al numero di uscite (ingressi) di S_D
- Le matrici di raggiungibiltà e osservabilità di S_D (P_D^+ e O_D^-) sono legate a quelle di S (P^+ e O^-) come segue:

$$P_D^+ = \begin{pmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}^T = (O^-)^T$$

$$O_D^- = \begin{pmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1} B \end{pmatrix}^T = (P^+)^T$$

Considerazioni "applicative"

- Il progetto di stimatori asintotici dello stato in catena chiusa:



può, grazie alla proprietà di dualità, essere effettuato sfruttando i metodi di allocazione degli autovalori per il progetto di controllori con retroazione dello stato.

Dinamica dell'osservatore asintotico

- Infatti, le equazioni dell'osservatore dello stato in catena chiusa sono:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(y(t) - C\hat{x}(t)) = (A + LC)\hat{x}(t) - Ly(t) + Bu(t)$$

- Definendo $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ la dinamica dell'errore è

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) =$$

$$= Ax(t) - A\hat{x}(t) + LCx(t) - LC\hat{x}(t) = (A + LC)(x(t) - \hat{x}(t)) = (A + LC)e(t)$$

i cui autovalori sono quelli di A+LC. Se la coppia (A,C) è osservabile, per dualità la coppia (A^T,C^T) è raggiungibile e gli autovalori dell'osservatore possono essere assegnati in modo arbitrario.

Progetto osservatore e rilevabilità

- Analogamente al caso del progetto di controllo, gli autovalori dell'osservatore possono essere assegnati arbitrariamente SOLO se il sistema è completamente osservabile
- Se non lo è, è ancora possibile costruire un osservatore asintotico purchè gli autovalori della parte non osservabile siano a parte reale negativa
- Il sistema in tal caso viene detto **rilevabile**

Controllo con retroazione dello stato stimato

- In generale, le variabili di stato non sono TUTTE misurabili direttamente, ma se il sistema è osservabile si può sfruttare il progetto di un osservatore ANCHE realizzare il controllo con retroazione completa dello stato (stimato)
- La dinamica del sistema complessivo diventa:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ u(t) = K\hat{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(y(t) - C\hat{x}(t)) \end{cases}$$

o in forma compatta:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax + BK\hat{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) = (A + LC + BK)\hat{x}(t) - LCx(t) \end{cases}$$

Principio di separazione

- Esprimendo la dinamica in termini di x(t), stato reale, ed e(t), errore di stima:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A+LC \end{pmatrix}}^{A_R} \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix} \\ y(t) = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

  i cui autovalori sono costituiti dall'unione di quelli di A+KC con quelli di A+LC.
- Questi autovalori sono assegnabili arbitrariamente e **separatamente** per la parte di controllo e di osservazione