Introduzione alla Logica Fuzzy

"Ragionamento approssimato con concetti definiti in modo vago"

Presenter: Dott. Ing. SIMANI SILVIO

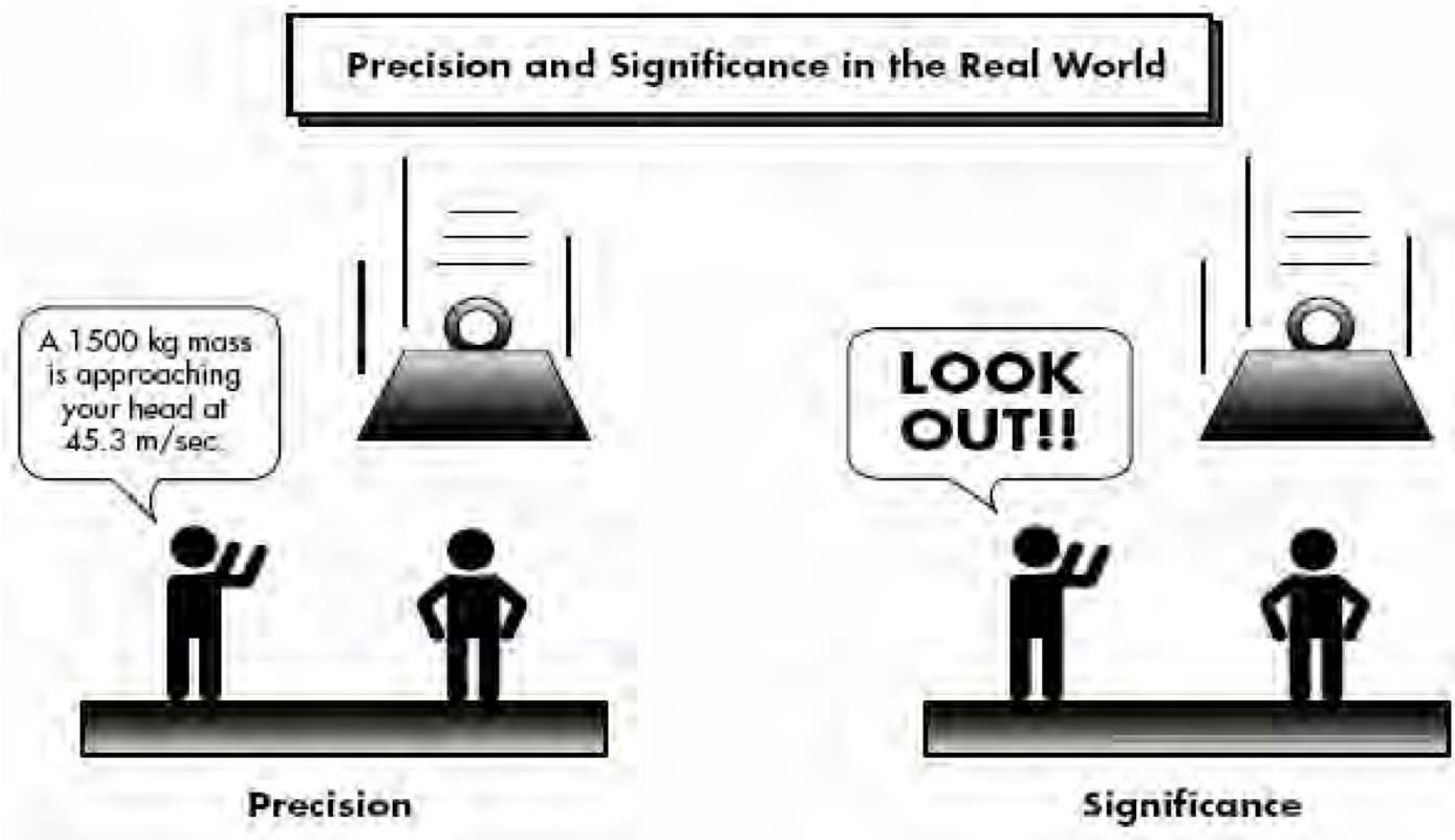
con supporto di

Dott. Ing. MARCELLO BONFE'

Ringraziamenti

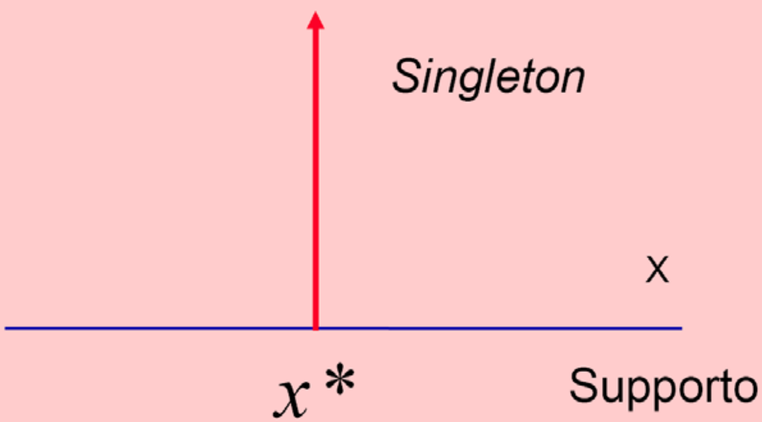
- Le dispense sono prese dal corso del Prof. Stefano Marsili-Libelli: Introduzione ai Fuzzy Sets. Dipartimento di Sistemi e Informatica Facoltà di Ingegneria Via S.Marta, 3. 50139 Firenze. Home page: `http://dsi.ing.unifi.it/~marsili/`

Esempio: Precisione o Significato?



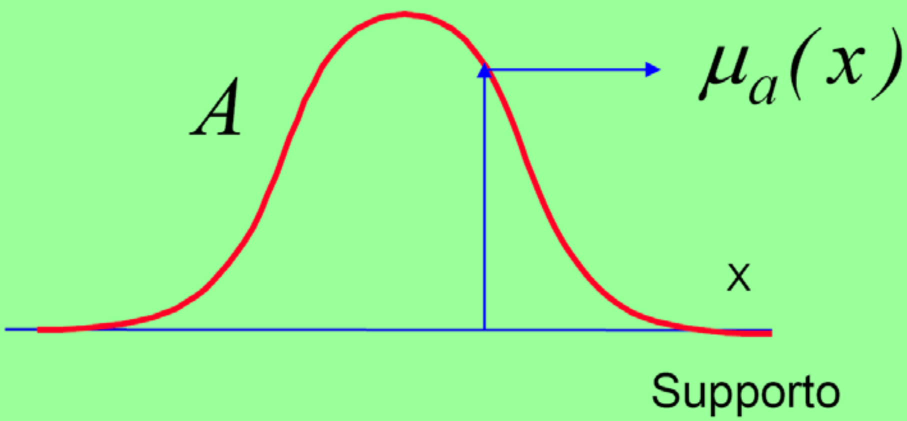
Valori “Crisp” e Fuzzy Sets

Rappresentazione deterministica (singleton)



$x^* \in X$

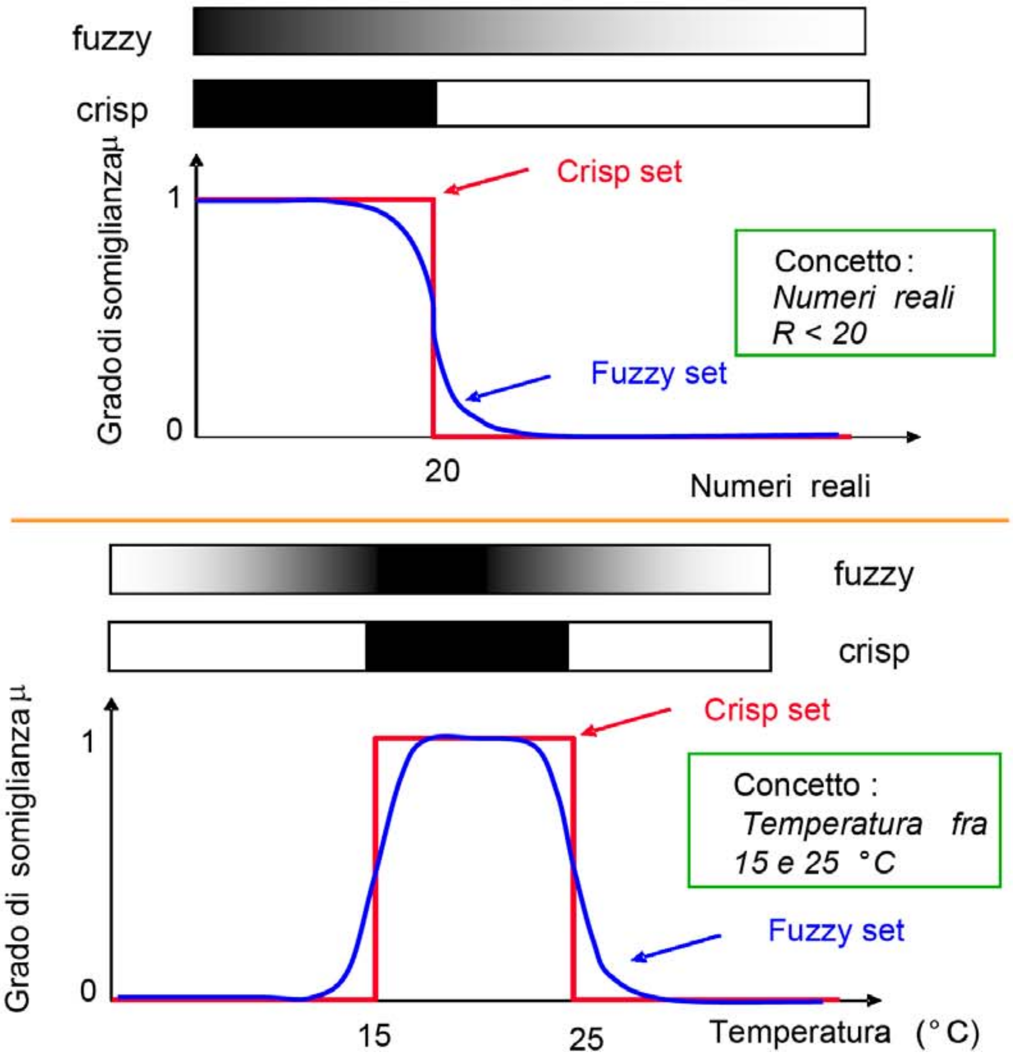
Fuzzy set



$x^* \in X$

$$\boxed{X \mapsto A : x \to \mu_a(x)}$$

Logica Fuzzy e “Grado di Appartenenza”



Il ragionamento “crisp” opera solamente con i concetti di ***uguale*** o ***diverso*** *(non uguale)*

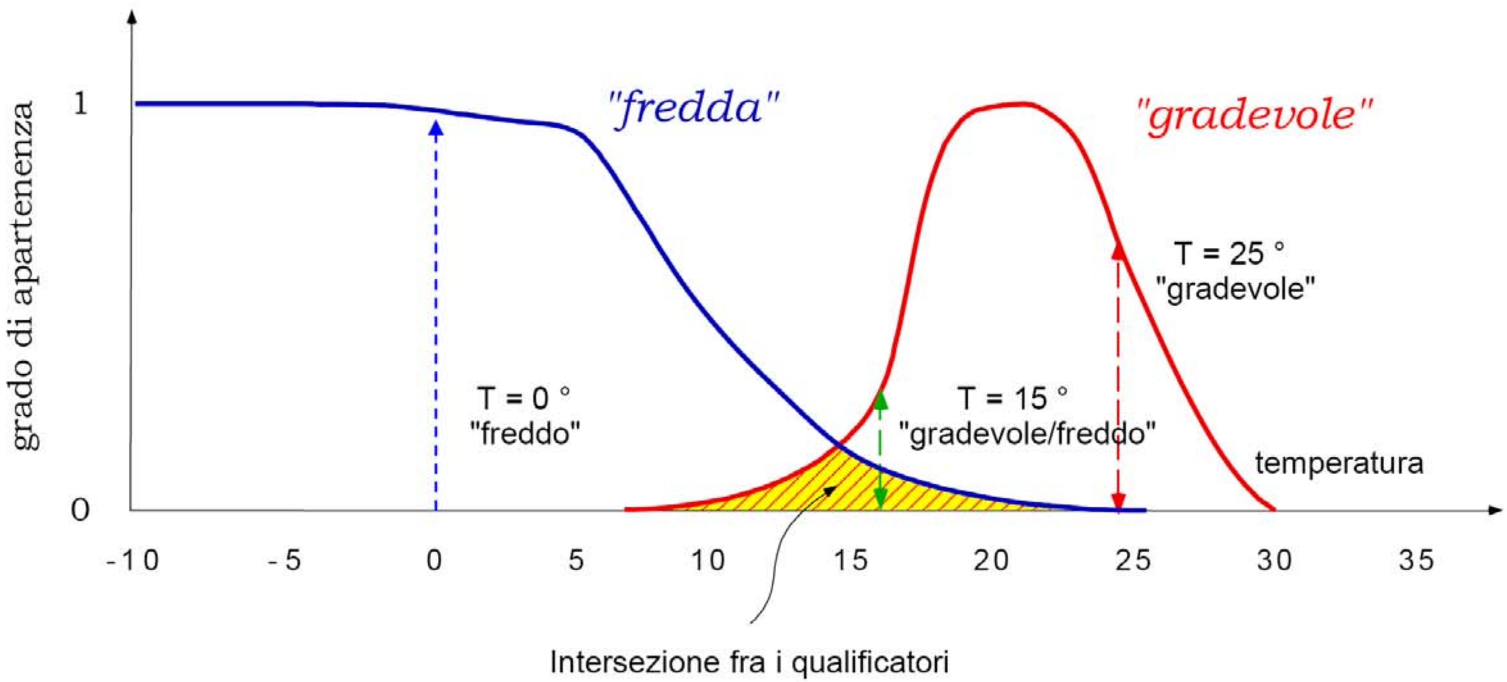
Il ragionamento “fuzzy” introduce la nozione di ***“grado di somiglianza”*** come appartenenza di un concetto ad un *prototipo* predefinito che ha la funzione di termine di paragone

Perciò il risultato hard *vero/falso* si “ammorbidisce” nel grado di appartenenza, che può assumere qualsiasi valore fra 0 e 1 con continuità

Le curve blu rappresentano i *prototipi* corrispondenti ai concetti espressi nelle scatole verdi

Qualificatori e Grado di Appartenenza

Dato l'insieme di supporto delle temperature ambientali definire i qualificatori di temperatura "gradevole" e "fredda"

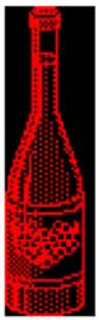


- Ciascun qualificatore deve valere 1 per almeno un valore del supporto (Normalità)
- L'insieme dei qualificatori deve coprire l'intero supporto (Completezza)
- Ci possono essere delle sovrapposizioni (Ambiguità)

Logica Fuzzy e Probabilità: Confronto

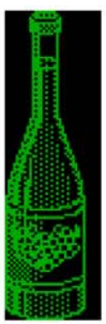
La Fuzziness esprime il grado di verità di un oggetto rispetto ad un concetto predefinito, basato su una ***esperienza diretta***, mentre la probabilità esprime ***l'eventualità*** che un evento futuro possa o non possa accadere.

Bezdek, 1991



A: Potabile con fuzziness = 0.9

Da quale bottiglia preferireste bere?



B: Potabile con probabilità = 0.9

Il contenuto della bottiglia è "simile" ad acqua potabile con "somiglianza pari a 90%. Questa è un'affermazione basata su una ***reale confronto*** fra il contenuto di ***quella*** bottiglia ed un'acqua potabile di riferimento. Questa è una certezza!

C'è una probabilità su 10 che il contenuto della bottiglia ***NON*** sia potabile !!!. Questa è un'affermazione basata su un test statistico, che basandosi ***induttivamente*** su un gran numero di test ***(ma non su quella bottiglia!)***, tenta di inferire il contenuto di quella bottiglia. Non c'è alcuna certezza circa il reale contenuto di ***quella*** bottiglia!

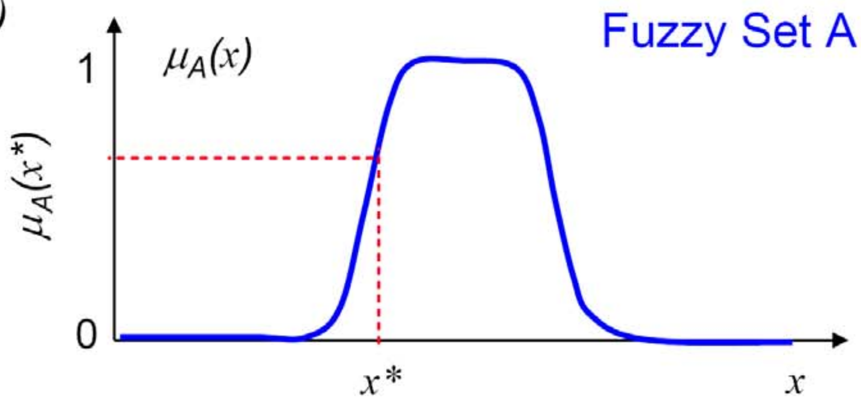
Insiemi Fuzzy: Definizioni di Base

- ***Supporto:*** l'intervallo $X \in \Re$ di interesse per la variabile indipendente x
- ***Funzione di appartenenza:*** la funzione $\mu(x)$ che fornisce il ***grado di verità*** per ciascun valore di $x \in X$. Tale funzione definisce operativamente il fuzzy set A come

$$A \quad \{\mu_A(x) : X \rightarrow (0,1)\}$$

- Il fuzzy set generalizza il concetto di appartenenza *(grado di verità)* graduandolo attraverso la funzione di appartenenza $\mu(x)$
- Dato un supporto X, un fuzzy set A su X è definito dalla funzione di appartenenza $\mu(x)$ che associa ciascun elemento di $x \in X$ ad un grado di verità associato al Fuzzy Set A attraverso $\mu(x)$

Funzione di appartenenza $\mu(x)$



Fuzzy Set A

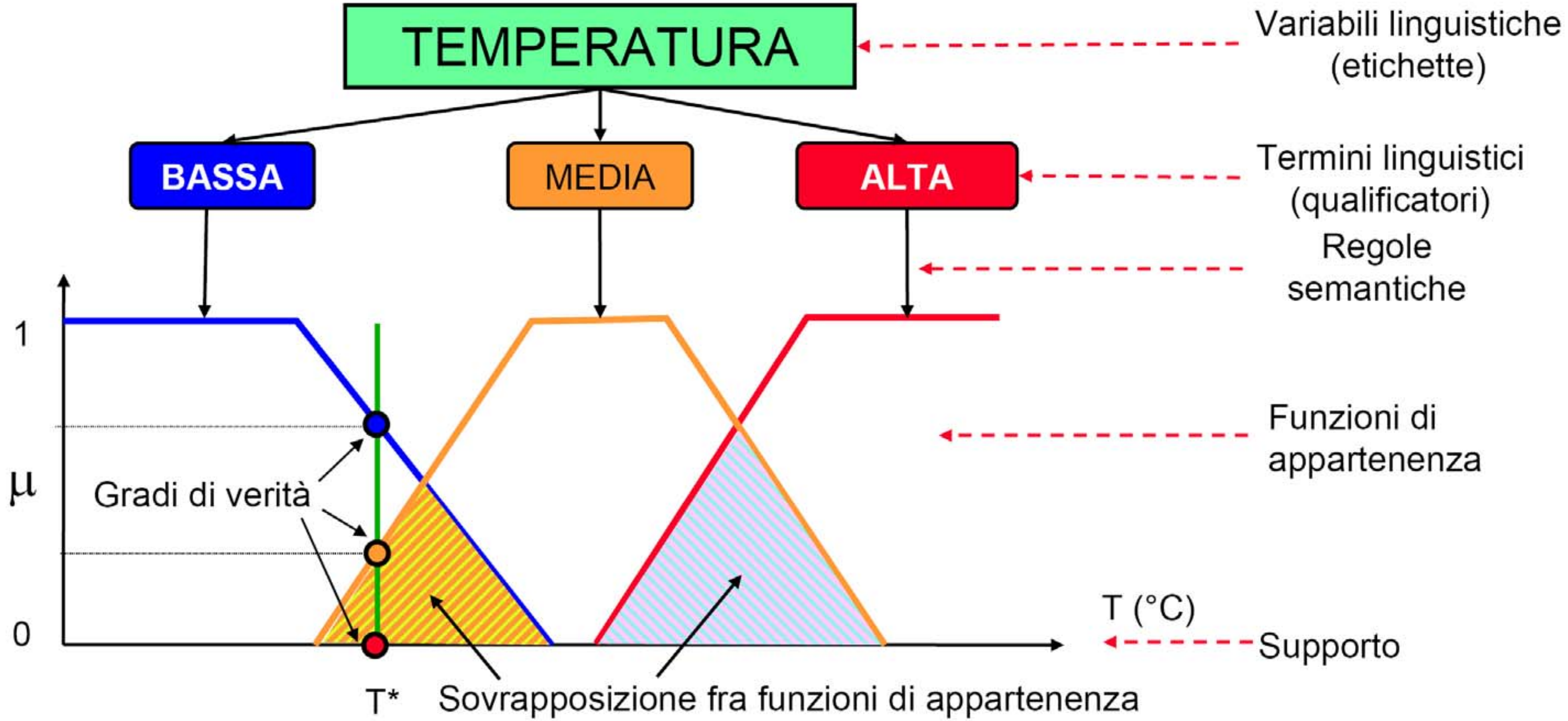
Supporto x

Variabili Linguistiche

Una variabile linguistica è un'etichetta che definisce un concetto.

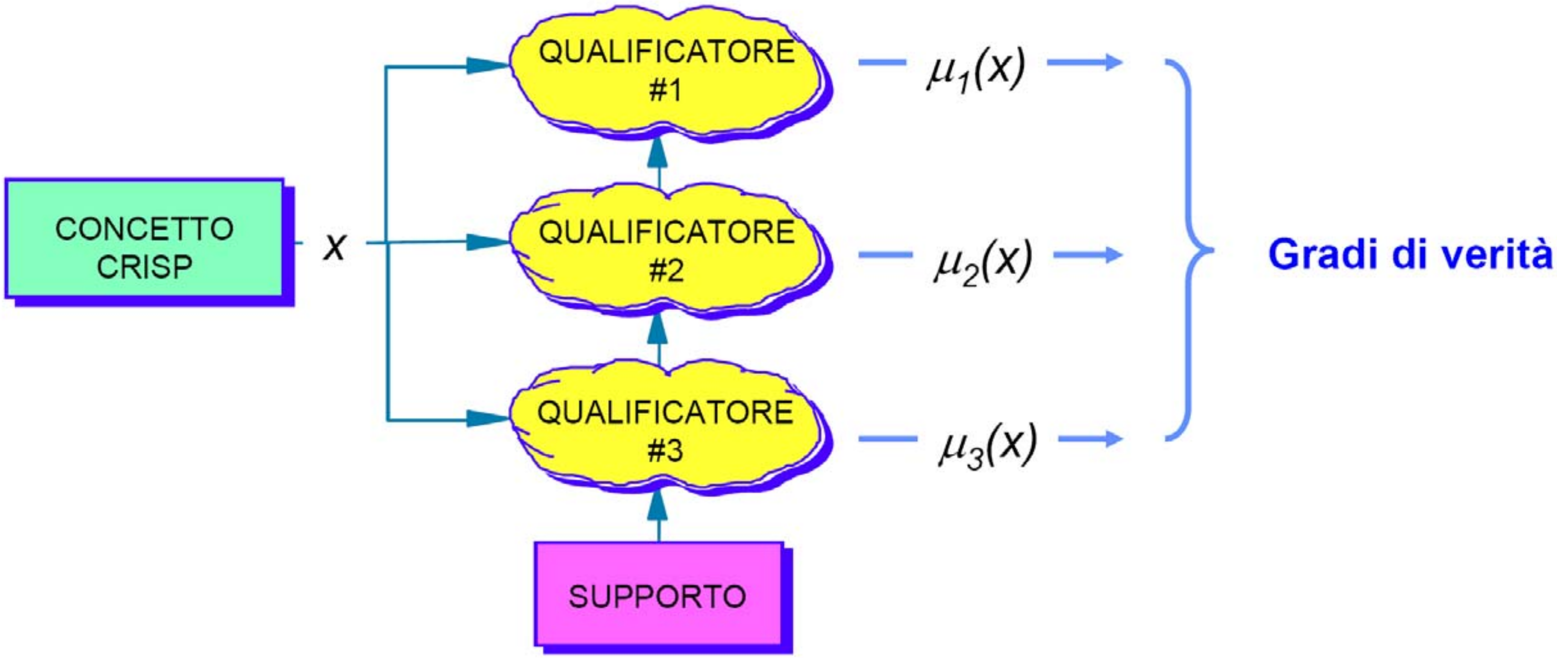
Ad essa corrisponde una funzione di appartenenza (qualificatore).

Esso determina il grado di verità μ di un qualsiasi valore del supporto.



"Fuzzy-ficazione"

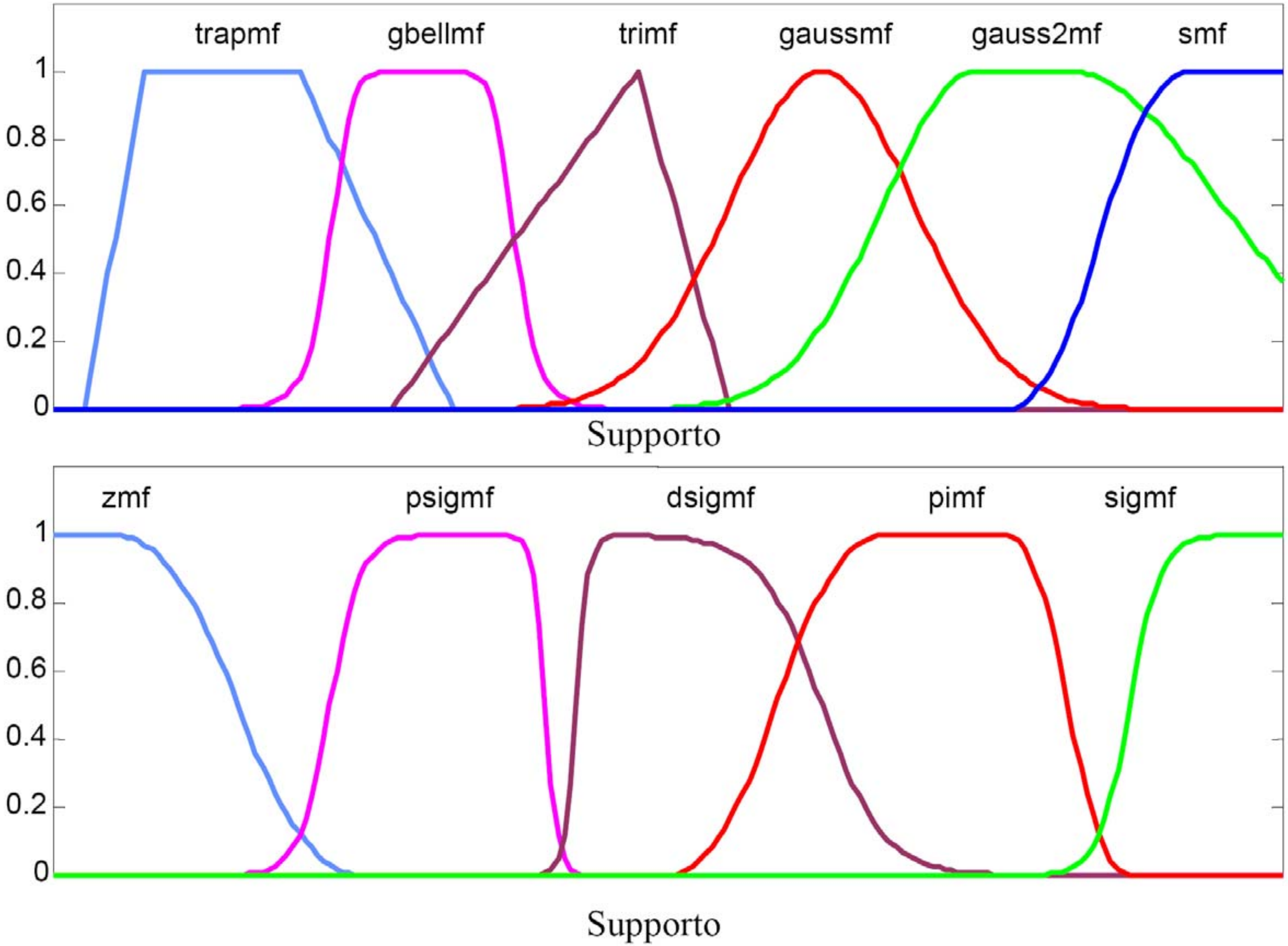
Consiste nella determinazione dei gradi di verità di un dato concetto rispetto ad un insieme di qualificatori predefiniti



Il risultato della fuzzificazione è un vettore contenente i gradi di verità del concetto rispetto ai qualificatori

$$x \xrightarrow{\mathit{fuzzificazione}} [\mu_1(x) \quad \mu_2(x) \quad \mu_3(x)]$$

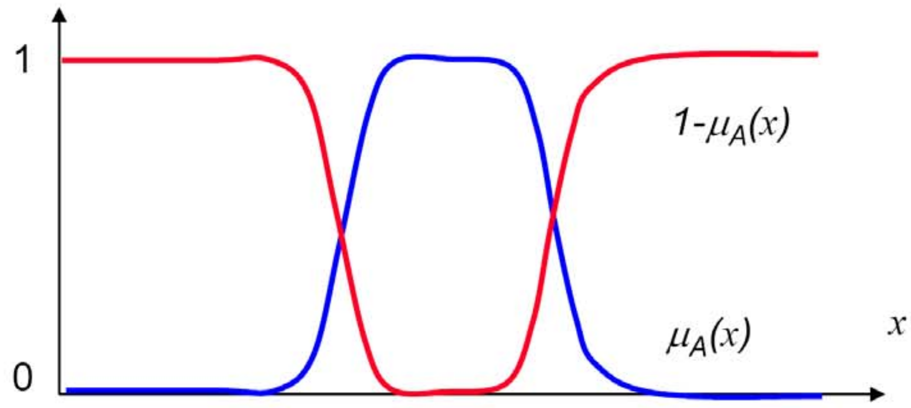
I Qualificatori nel Fuzzy Logic Toolbox™



Proprietà degli Insiemi Fuzzy

- ***Insieme complemento:*** il fuzzy set con funzione di appartenenza *complementare* rispetto a μ

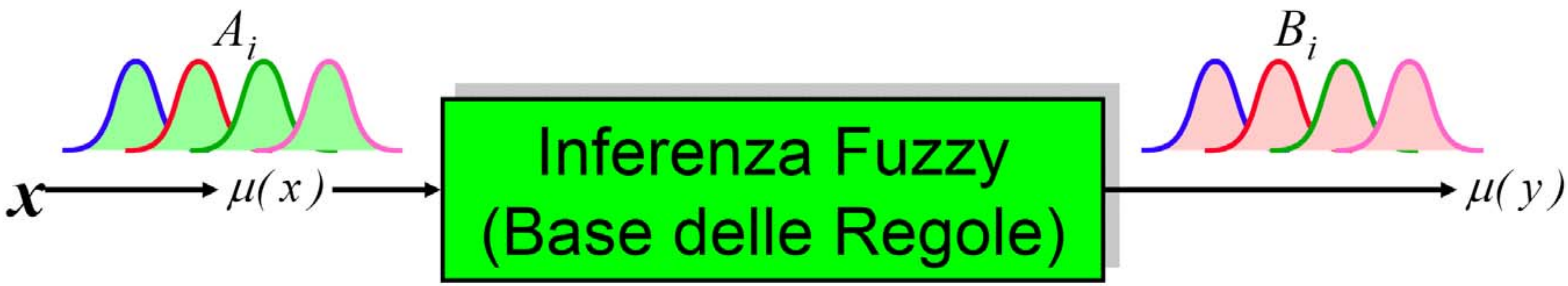
$$\overline{A} : \{\overline{\mu}(x) = 1 - \mu(x) : X \rightarrow (0,1)\}$$



- ***Normalità:*** se esiste almeno un elemento di $x \in X$ tale che $\mu(x) = 1$

- ***Completezza:*** dato un insieme di fuzzy set $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ definiti tramite le funzioni di appartenenza $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$ su un supporto $X \in \Re$, tale insieme dicesi *completo* se per un qualsiasi $x \in X$ esiste almeno una funzione di appartenenza nell'insieme $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$ diversa da zero.

Logica Fuzzy: Regole di Inferenza



Regola di inferenza $$R_i : \; IF \; \underbrace{x_1 \; is \; A_1 \; AND \; x_2 \; is \; A_2}_{antecedente} \; THEN \; \underbrace{y \; is \; B}_{conseguente}$$

- Alla base della logica fuzzy stanno le regole di inferenza
- Più predicati fuzzy possono essere ***connessi*** fra loro **(AND)**
- Dato un predicato ***antecedente***, la sua verità implica **(THEN)** quella del predicato ***conseguente***
- Vanno definiti gli operatori logici di ***connessione*** fra concetti fuzzy e di ***implicazione*** fra antecedente e conseguente

Operatori Fuzzy: Norme Triangolari -> *Connettivi AND*

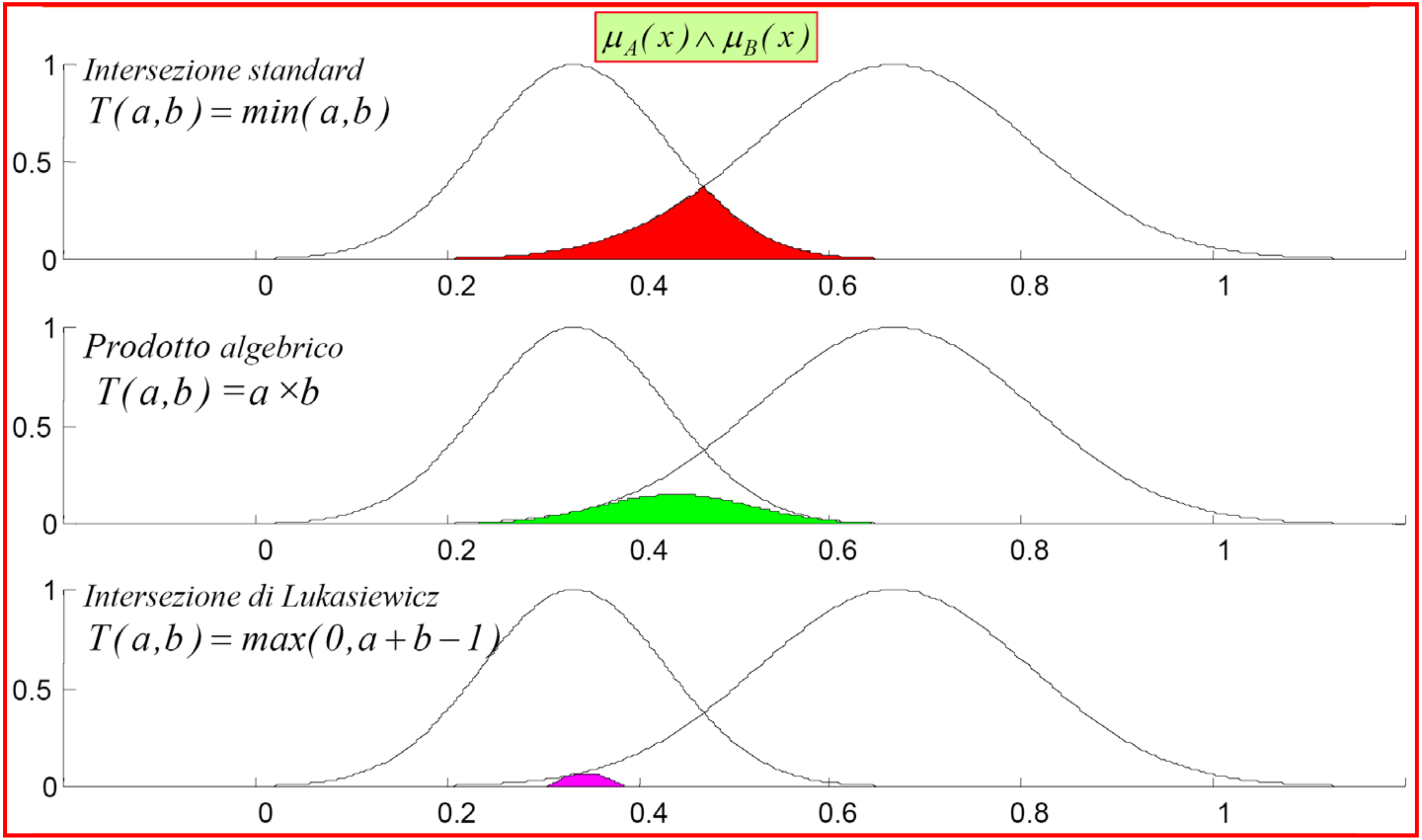
$$T(\mu_A(x),\mu_B(x)) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

- L'operatore *T(.,.)* ha le seguenti proprietà
  - Limitatezza $T(0,0)=0;\ T(a,1)=T(1,a)=a$ *Prevale il più piccolo*
  - Monotonicità $b \le c \Rightarrow T(a,b) \le T(a,c)$
  - Commutatività $T(a,b)=T(b,a)$
  - Associatività $T(a,T(b,c))=T(T(a,b),c)$

Possibili *t*-norme

Intersezione standard	$T(a,b)=min(a,b)$
Prodotto algebrico	$T(a,b)=a \times b$
Intersezione di Lukasiewicz	$T(a,b)=max(0,a+b-1)$

Esempi di T-norm



Operatori Fuzzy: S-norme Triangolari -> *Connettivi OR*

$$S(\mu_A(x),\mu_B(x)) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

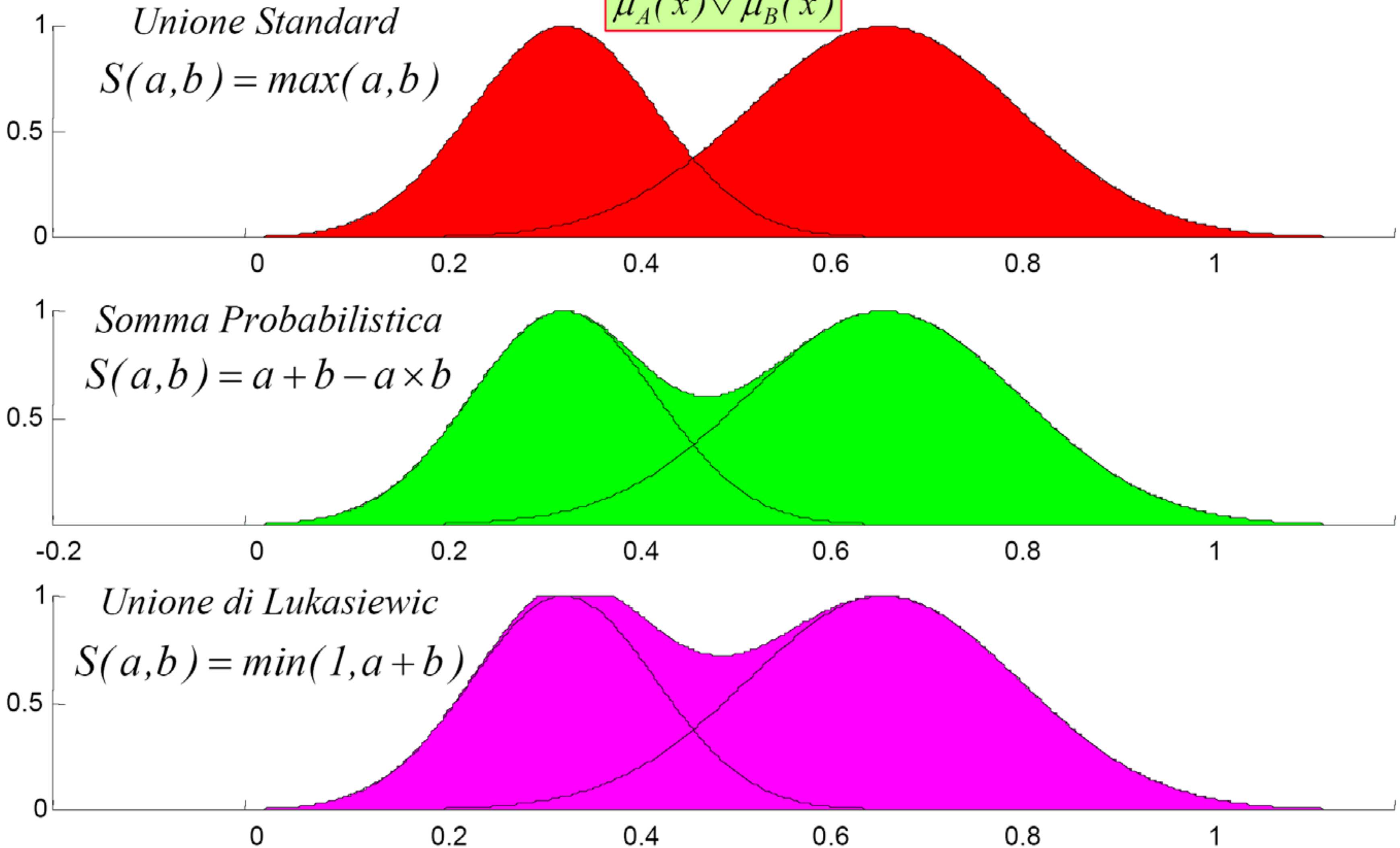
- L'operatore *S(.,.)* ha le seguenti proprietà
  - Limitatezza $S(1,1) = 1;\ S(a,0) = S(0,a) = a$ *Prevale il più grande*
  - Monotonicità $b \le c \Rightarrow S(a,b) \le S(a,c)$
  - Commutatività $S(a,b) = S(b,a)$
  - Associatività $S(a,S(b,c)) = S(S(a,b),c)$

Possibili *s*-norme

Unione Standard	$S(a,b) = max(a,b)$
Somma Probabilistica	$S(a,b) = a + b - a \times b$
Unione di Lukasiewic	$S(a,b) = min(1,a+b)$

Esempi di S-norm

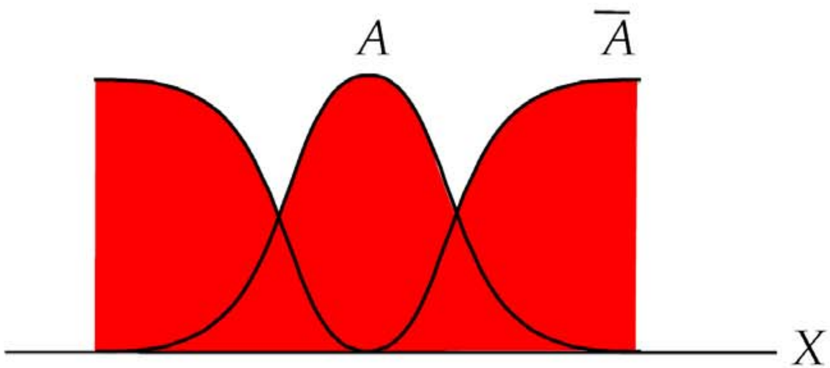
$\mu_A(x) \vee \mu_B(x)$

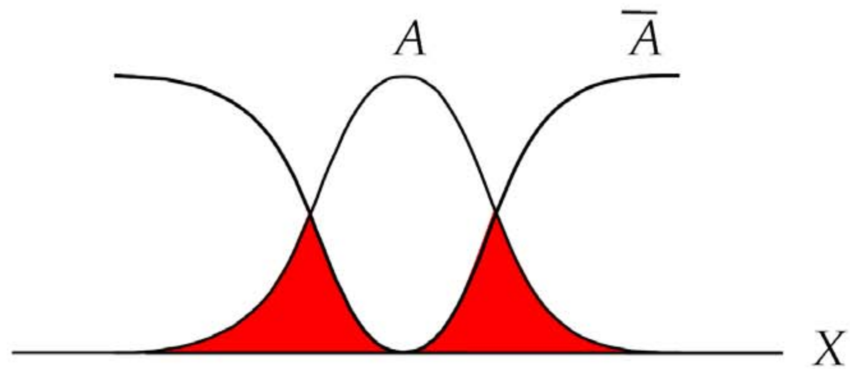


Insiemi Crisp e Insiemi Fuzzy: Confronto

Non valgono le proprietà della logica classica

crisp sets	Fuzzy sets
$A \cup \overline{A} = X \quad A \cap \overline{A} = \varnothing$	$A \cup \overline{A} \neq X \quad A \cap \overline{A} \neq \varnothing$





$$X \neq A \vee \overline{A} : max\{\mu_A(x), 1-\mu_A(x) \quad x \in X\}$$

$$\varnothing \neq A \wedge \overline{A} : min\{\mu_A(x), 1-\mu_A(x) \quad x \in X\}$$

Implicazione Fuzzy: *Logica Deduttiva*

- La logica fuzzy è ***deduttiva***, nel senso che condiziona la verità del *conseguente* a quella dell'antecedente

$$\boxed{\underbrace{IF \quad x \text{ is } A}_{antecedente} \quad \underbrace{THEN \quad y \text{ is } B}_{conseguente}}$$

- La notazione *x is A* va intesa come il grado di appartenenza di *x* al fuzzy set *A*, ovvero operativamente

$$\boxed{x \text{ is } A \rightarrow \mu_A(x)}$$

- Analogamente per il conseguente *y is B* va intesa come il grado di appartenenza del conseguente *y* al fuzzy set *B*

$$\boxed{y \text{ is } B \rightarrow \mu_B(y)}$$

- Il problema nuovo rispetto alle precedenti operazioni è che in generale *A* e *B* sono definiti su due supporti diversi *X* e *Y !!!*
- Perciò va definito un nuovo operatore: ***l' Implicazione fuzzy*** che condizione il grado di verità del conseguente con quello dell'antecedente

Implicazione Fuzzy – Esempi

- L'implicazione

$$R: IF\ \ x\ is\ \ A\ THEN\ \ y\ is\ \ B$$

- Opera sul prodotto cartesiano fra gli spazi di ingresso (X) e uscita (Y)

$$R: \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \rightarrow [0,1]$$

- Il grado di appartenenza del conseguente è dato dall'operatore di implicazione (THEN), che si realizza con una *t*-norma

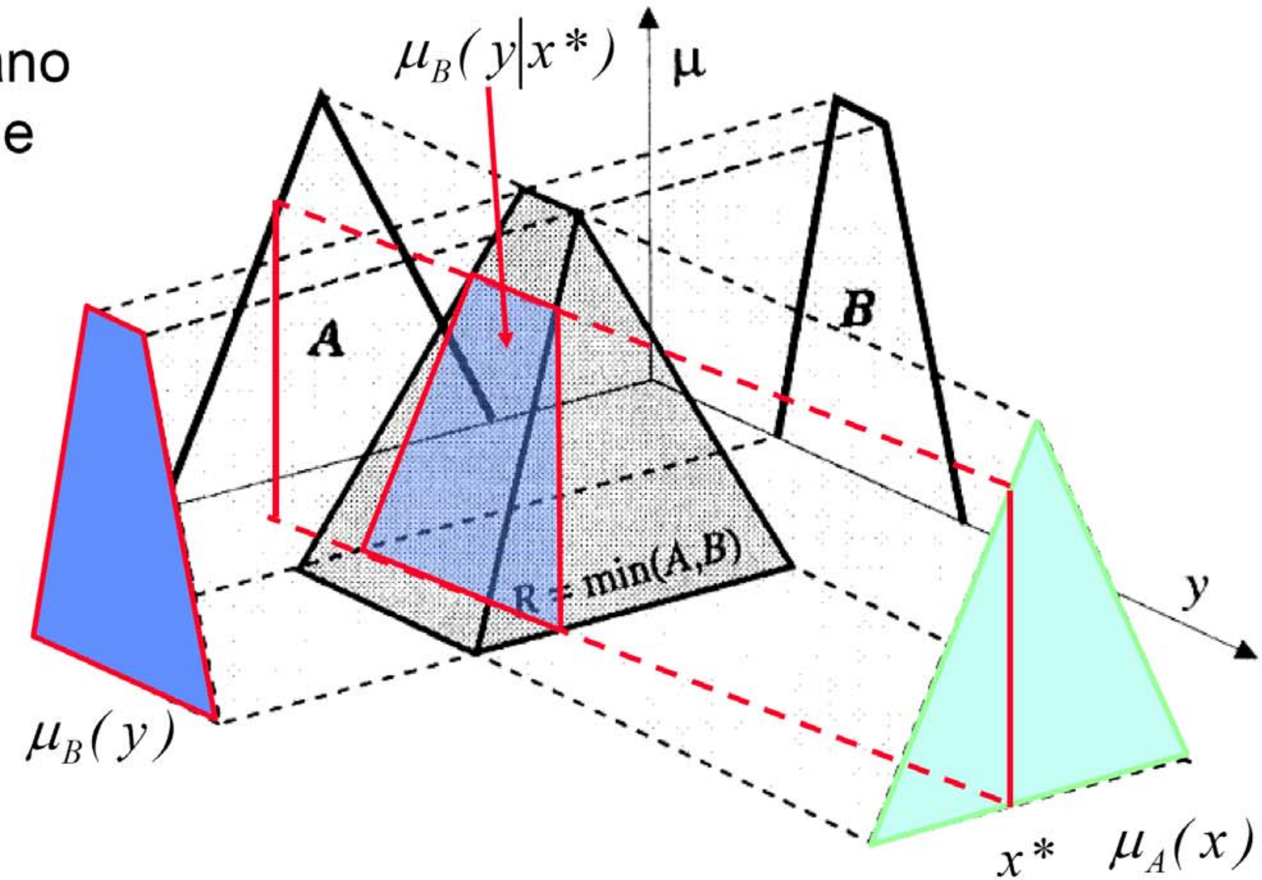
- Possibili operatori di implicazione *t*-norme

$$R: \begin{cases} min\left(1, 1-\mu_A(x)+\mu_B(y)\right) & Lukasievic\ \ z \\ max\left(1-\mu_A(x), \mu_B(y)\right) & Kleene \\ min\left(\mu_A(x), \mu_B(y)\right) & Mamdani \\ \mu_A(x) \times \mu_B(y) & Prodotto \end{cases}$$

"Superficie" di Implicazione Fuzzy – Esempio

L'implicazione fuzzy opera sul prodotto cartesiano dei due supporti e produce una ***superficie*** di inferenza che rappresenta la relazione fra ingresso (antecedente) e uscita (conseguente)

$$R(\mu_A(x), \mu_B(y)) = min\left(\mu_A(x), \mu_B(y)\right)$$



Implicazione Fuzzy – Regole

$$R : IF\ \ x\ is\ A\ THEN\ \ y\ is\ B$$

$$\boldsymbol{S} : \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \rightarrow \mu_s(x,y) = \mu_a(x) \wedge \mu_b(y) = \begin{cases} min\{\mu_a(x), \mu_b(y)\} & x \in \boldsymbol{X} \\ \mu_a(x) \times \mu_b(y) & y \in \boldsymbol{Y} \end{cases}$$

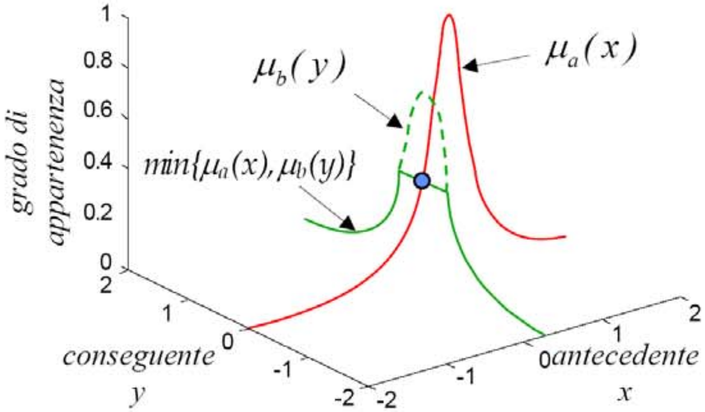
Prodotto Cartesiano dei due insiemi fuzzy

Connettivo di implicazione

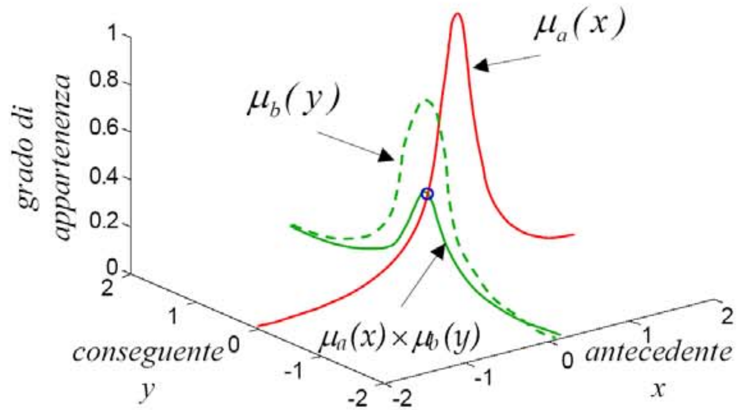
Possibili operatori

L'antecedente condiziona il grado di appartenenza del conseguente

Operatore 'min'



Operatore 'prod'



Implicazione con 1 Antecedente

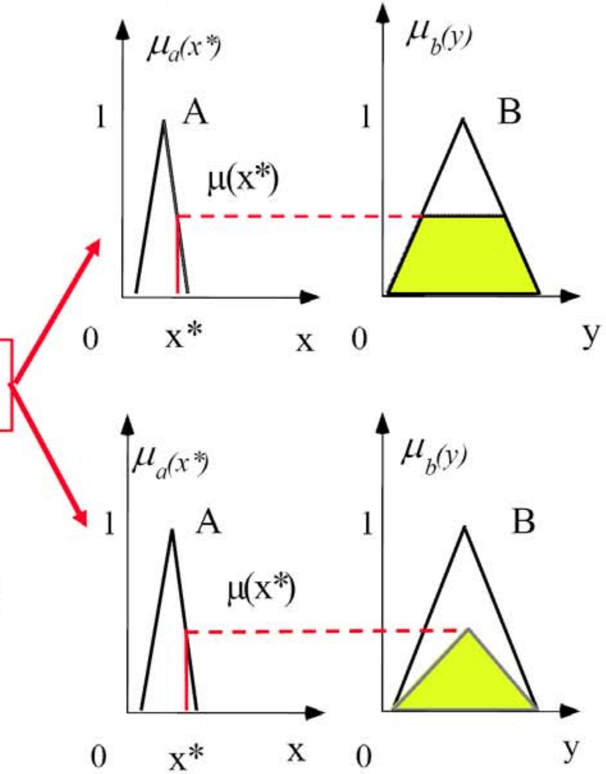
$$IF\ \ x\ is\ \ A\ THEN\ \ y\ is\ \ B$$

$$\mu_b(y) == \mu_a(x^*) \wedge \mu_b(y)$$

Composizione 'min'

$$\mu_b(y) = min\big(\mu_a(x^*), \mu_b(y)\big)$$

$$x\ \ is\ \ A \Rightarrow \mu_a(x)$$



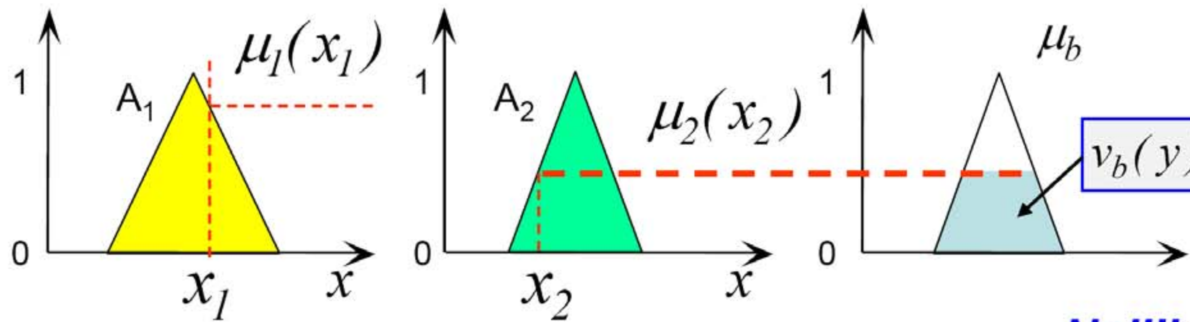
Composizione 'prod'

$$\mu_b(y) = \mu_a(x^*) \times \mu_b(y)$$

Implicazione con più Antecedenti – Esempio

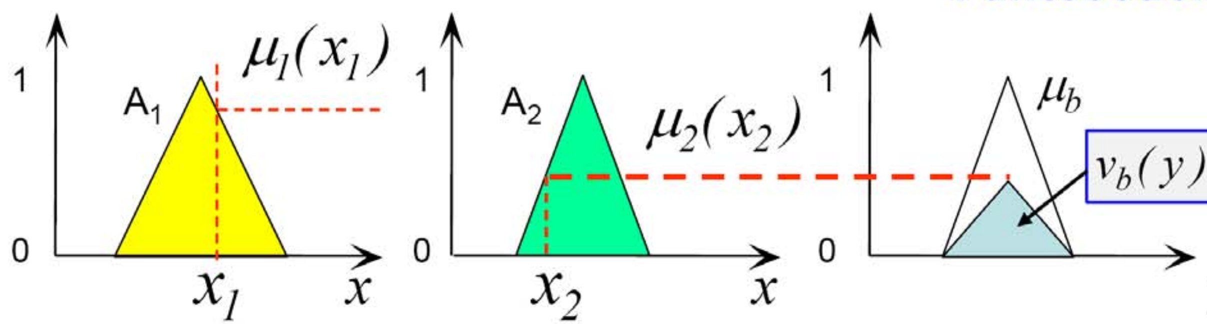
$$IF\ (x_1\ is\ A_1)\ AND\ (x_2\ is\ A_2)\ THEN\ y\ is\ B$$

$$\mu_b(y) = (\mu_1(x^*) \wedge \mu_2(x^*)) \wedge \mu_b(y)$$



$$v_b(y) = min(min(\mu_1(x), \mu_2(x)), \mu_b(y))$$

Nell'implicazione prevale l'antecedente con minore grado di verità



$$v_b(y) = min(\mu_1(x), \mu_2(x)) \times \mu_b(y)$$

Inferenza Fuzzy - Algoritmo

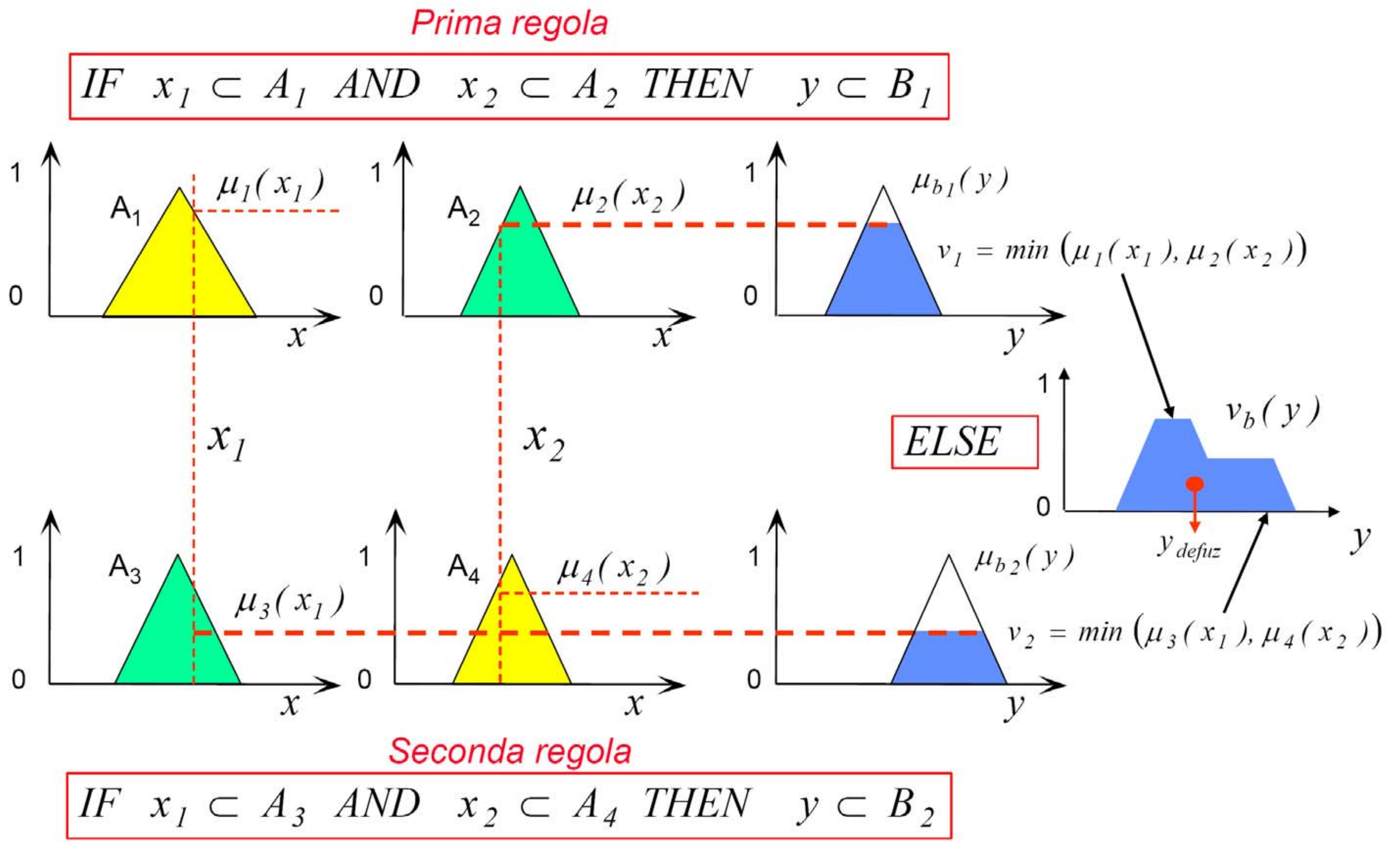
- In genere una sola regola fuzzy non è sufficiente per definire l'intero concetto che vogliamo esprimere
- Si usano allora più regole, connesse fra di loro con il predicato ELSE
- Esempio: si considerino due regole

$$\begin{aligned}&R_1 : IF\ (x_1\ is\ A_{11})\ AND\ (x_2\ is\ A_{21})\ THEN\ y\ is\ B_1\\&ELSE\\&R_2 : IF\ (x_1\ is\ A_{12})\ AND\ (x_2\ is\ A_{21})\ THEN\ y\ is\ B_2\end{aligned}$$

In questo caso si considera l'alternativa fra le somiglianze di x_1 a A_{11} o A_{12} e di x_2 a A_{21} o A_{22}. Ciascun antecedente mappa il conseguente in B_1 o B_2 in funzione del proprio grado di verità

- Tale connettivo rappresenta il grado di alternativa delle singole regole e viene perciò realizzato con un operatore s-norma ($\vee$)

Esempio di Composizione di 2 Regole



Connettivi dell'Inferenza Fuzzy

$$R_1 : \ IF \ \overbrace{x_1 \subset A_3}^{\mu_1(x_1)} \ AND \ \overbrace{x_2 \subset A_4}^{\mu_2(x_2)} \ THEN \ y \subset B_1$$

CONNETTIVO REGOLE *massimo* → $ELSE$

CONNETTIVO ANTECEDENTI *minimo o prodotto*

IMPLICAZIONE *minimo o prodotto*

$$R_2 : \ IF \ \underbrace{x_1 \subset A_3}_{\mu_3(x_1)} \ AND \ \underbrace{x_2 \subset A_4}_{\mu_4(x_2)} \ THEN \ y \subset B_2$$

Inferenza con *m* Regole e *n* Antecedenti

Caso Generale

n antecedenti

m regole

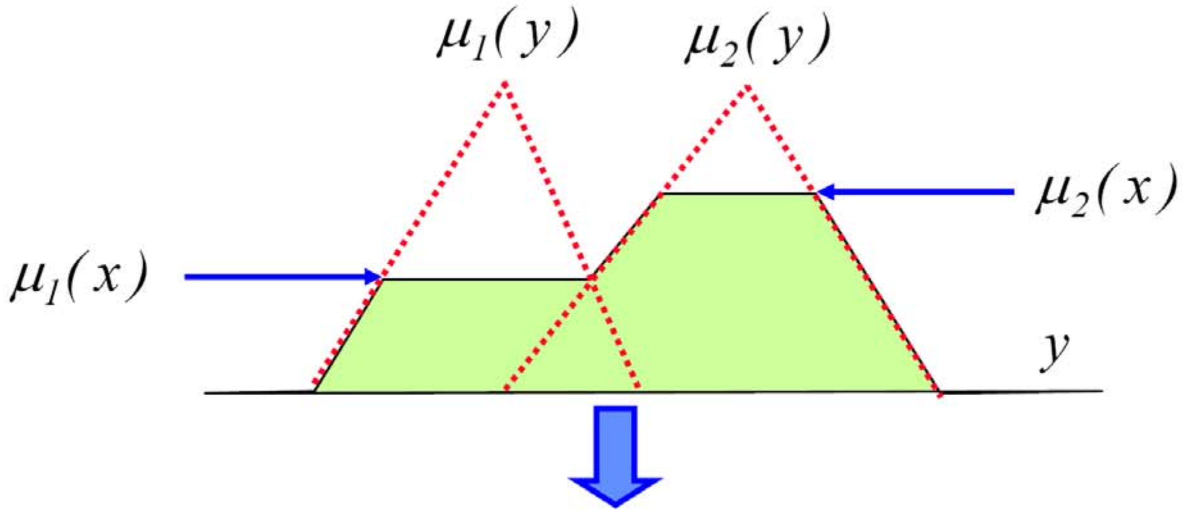
$$\begin{cases} R_1 : \quad IF\ (x_1\ is\ A_{1,1})\ AND\ .....\ AND\ (x_n\ is\ A_{1,n})\ THEN\ (y\ is\ B_1) \\ \qquad ELSE \\ .... \\ R_m : \quad IF\ (x_1\ is\ A_{m,1})\ AND\ .....\ AND\ (x_n\ is\ A_{m,n})\ THEN\ (y\ is\ B_m) \end{cases}$$

$$A_{j,i} \rightarrow \mu_{j,i}(x) \quad B_j \rightarrow \mu_{b_j}(y)$$

$$\mu_b(y) = \bigcup_{j=1}^{m} \left\{ \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mu_{j,i}(x^*) \right) \wedge \mu_{b_j}(y) \right\}$$

La De-fuzzy-ficazione – “Interfaccia Esterna”

- Il risultato dell’inferenza fuzzy è un fuzzy set ottenuto per unione (S-norma) dei risultati delle singole inferenze

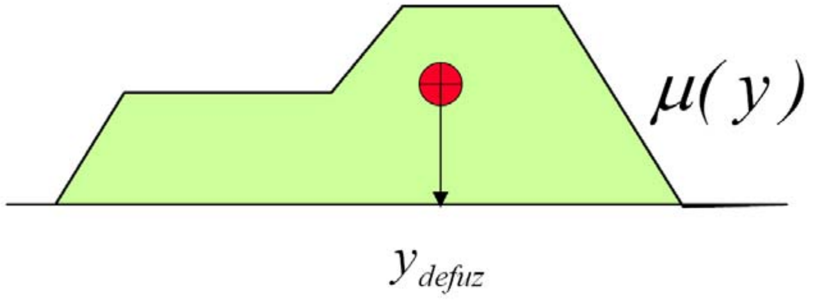


Quale y ?

- Il Fuzzy Set colorato in verde rappresenta l’uscita dell’inferenza in termini fuzzy, ma come far corrispondere a questo un ***singolo valore crisp di y*** rappresentativo dell’inferenza?

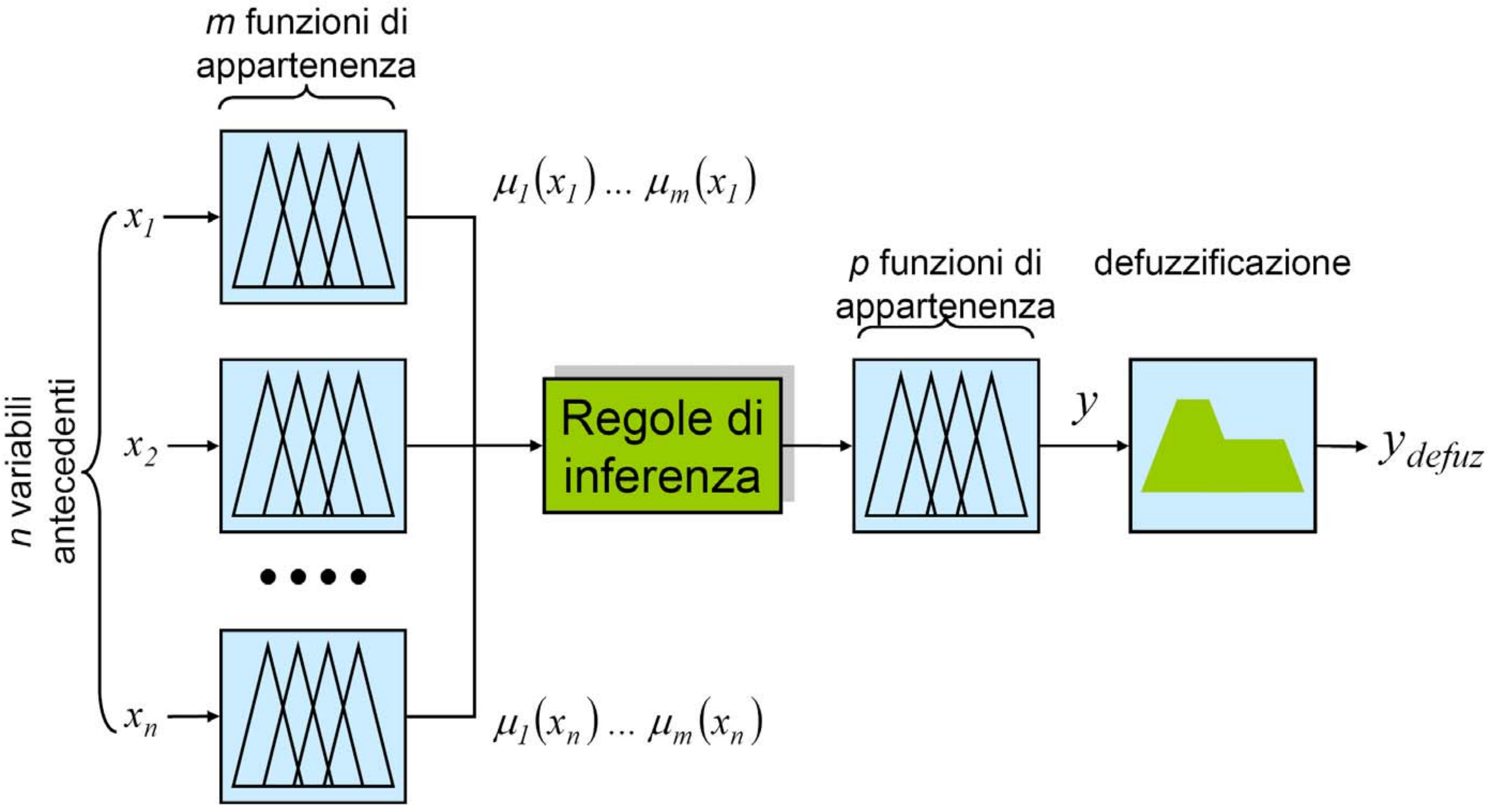
De-fuzzy-ficazione (vs. Fuzzy-ficazione)

- I metodo più affidabile è il *centro di gravità.*
- Si calcola y_{defuz} come l'ascissa del baricentro della figura geometrica che rappresenta il fuzzy set di uscita



$$y_{defuz} = \frac{\int_Y y \cdot \mu(y)\,dy}{\int_Y \mu(y)\,dy}$$

Inferenza Fuzzy - *Riepilogo*



Inferenza Fuzzy “alla Sugeno”

- Il costrutto logico è lo stesso, con antecedenti fuzzy e le medesime regole di composizione, ma il conseguente è un singolo valore deterministico (*singleton*)

$$IF\ x_1\ is\ A_1\ AND\ x_2\ is\ A_2\ \ THEN\ \boxed{y = k}$$

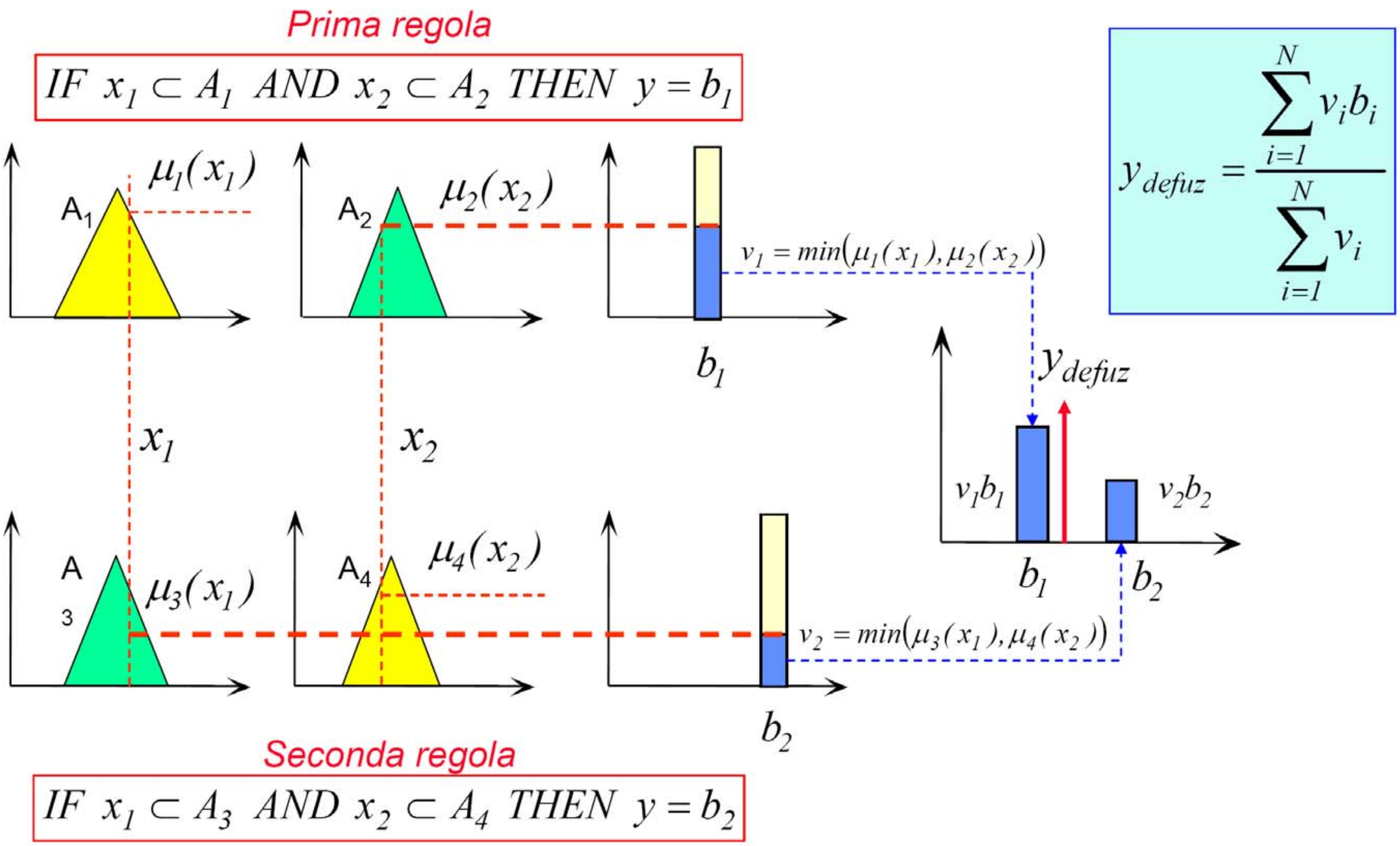
Valore assunto dall'uscita in funzione del grado di verità dell'antecedente

- Viene eliminato il problema della defuzzificazione: basterà effettuare la media dei vari singleton pesata con i gradi di verità degli antecedenti;
- E’ immediata l’estensione a conseguenti più complessi, come funzioni lineari o più in generali a funzione a base radiale (approssimatori universali)

$$\boxed{IF\ x_1\ is\ A_1\ AND\ x_2\ is\ A_2\ \ THEN\ y = f(x_1, x_2)}$$

- Si apre così la strada ad un ricongiungimento fra la teoria dei sistemi "classica" ed il mondo fuzzy.

Implicazione “alla Sugeno”



Riferimenti Bibliografici

- Yager R.R. e Filev D.P. (1994) Essentials of Fuzzy *Modelling and Control*, Wiley
- Babuska R. (1998) *Fuzzy Modelling for Control*, Kluver
- Wang, L. X. (1994) *Adaptive Fuzzy Systems and Control*, PTR Prentice Hall
- R. Jager.(1995) *Fuzzy Logic in Control*. Thesis Technische Universiteit Delft. Disponibile on-line: ftp://195.214.211.1/books/DVD-030/Jager_M._Fuzzy_Logic_in_Control_(1995)(en)(322s).pdf