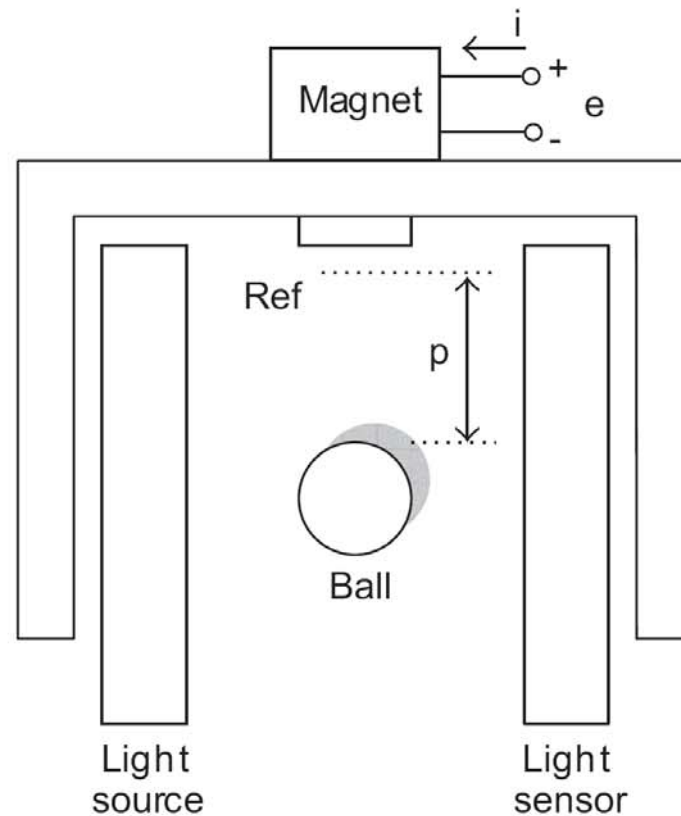


Levitatore Magnetico

Marcello Bonfè & Silvio Simani

Descrizione

Si consideri il sistema a levitazione magnetica prototipale, schematizzato in Figura 1.1, costituito da una sfera di materiale ferromagnetico tenuta in sospensione tramite un elettromagnete. La posizione verticale della sfera può essere misurata con un sensore ottico lineare, accoppiato ad una sorgente luminosa laminare. Interponendosi fra sorgente e sensore, la sfera determina un'interruzione della lama di luce rilevata dal sensore, che permette di determinare in modo precisamente la posizione verticale della sfera stessa. Si ipotizza misurabile anche la corrente elettrica che scorre nell'elettromagnete.



Modello Matematico (1)

Il modello matematico del sistema può essere determinato ipotizzando che la forza di attrazione magnetica sia proporzionale al quadrato del rapporto fra corrente i e posizione verticale della sfera p (se $p = 0$ la sfera è a contatto con il magnete) e che l'induttanza dell'elettromagnete sia influenzata dalla posizione p secondo una relazione nonlineare. Applicando note leggi fisiche, si ottiene:

$$\begin{aligned} Ri + \frac{d(L(p)i)}{dt} &= e \\ \frac{dp}{dt} = v; \quad m \frac{dv}{dt} &= mg - C \left(\frac{i}{p} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

nella quale u è la tensione applicata all'elettromagnete, R e $L(p)$ sono resistenza e induttanza del circuito elettrico, v è la velocità di spostamento verticale della sfera, g è la nota costante di accelerazione gravitazionale e C è la costante della forza di attrazione magnetica.

Modello Matematico (2)

Ipotizzando che l'induttanza sia determinata dalla seguente relazione:

$$L(p) = L_1 + \frac{2C}{p} \quad (1.2)$$

nella quale C è la medesima costante descritta in precedenza, si può ottenere con le scelte intuitive di variabili di stato, ingresso ed uscita $x_1 = p$, $x_2 = v$, $x_3 = i$, $y = x_1$ e $u = e$ il seguente modello nonlineare nello spazio degli stati, affine nel controllo e SISO:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= g - \frac{C}{m} \left(\frac{x_3}{x_1} \right)^2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= -\frac{R}{L_1} x_3 + \frac{2C}{L_1} \left(\frac{x_2 x_3}{x_1^2} \right) + \frac{1}{L_1} u \end{aligned} \quad (1.3)$$

Modello Matematico (3)

del tipo:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u \\ y &= h(\mathbf{x})\end{aligned}$$

con $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T = [p \quad v \quad i]^T$ e

$$\mathbf{f} = \left[x_2 \quad g - \frac{C}{m} \left(\frac{x_3}{x_1} \right)^2 \quad -\frac{R}{L_1} x_3 + \frac{2C}{L_1} \left(\frac{x_2 x_3}{x_1^2} \right) \right]^T$$

$$\mathbf{b} = \left[0 \quad 0 \quad \frac{1}{L_1} \right]^T$$

$$h = x_1$$

Analisi dell'Equilibrio (1)

Gli stati di equilibrio del sistema possono essere caratterizzati in funzione della posizione verticale della sfera, per la quale è generalmente di interesse definire una posizione desiderata (*set-point*) x_{1d} . Si può infatti facilmente verificare che la famiglia di punti che soddisfa la condizione di equilibrio del sistema è del tipo:

$$\mathbf{x}_e = \left[x_{1d} \quad 0 \quad x_{1d} \sqrt{\frac{gm}{C}} \right]^T$$

vale a dire che una volta fissata la posizione verticale desiderata, la corrente elettrica (x_3) da mantenere nell'elettromagnete è determinata di conseguenza. Inoltre, come si può verificare dall'ultima riga della (1.3), in tali condizioni di equilibrio la tensione da applicare in ingresso al sistema è (come ovvia conseguenza della legge di Ohm):

$$u_e = R x_{1d} \sqrt{\frac{gm}{C}}$$

Analisi dell'Equilibrio (2)

In questa famiglia di punti di equilibrio, il calcolo della linearizzazione approssimata permette di ottenere le seguenti matrici (con \mathbf{A} dipendente solo da x_{1d}):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2g}{x_{1d}} & 0 & -\frac{2C}{mx_{1d}} \sqrt{\frac{gm}{C}} \\ 0 & \frac{2C}{x_{1d}L_1} \sqrt{\frac{gm}{C}} & -\frac{R}{L_1} \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_1} \end{pmatrix}$$

Si noti inoltre che qualora sia necessario calcolare l'approssimazione lineare del sistema in una condizione di funzionamento non necessariamente di equilibrio (es. $x_{3d} \neq x_{1d}\sqrt{gm/C}$), la matrice \mathbf{A} più generica diventa:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2Cx_{3d}^2}{mx_{1d}^3} & 0 & -\frac{2Cx_{3d}}{mx_{1d}^2} \\ 0 & \frac{2Cx_{3d}}{x_{1d}^2L_1} & -\frac{R}{L_1} \end{pmatrix}$$

mentre la matrice \mathbf{B} ovviamente non cambia.

Feedback Linearization (1)

Si può dimostrare con alcuni passaggi che il sistema ha grado relativo pari a 3, purchè la corrente (e quindi x_3) non si annulli, pertanto la feedback linearization ingresso-uscita porta anche ad una linearizzazione completa ingresso-stato. Ponendo come nuove variabili di stato

$$\mathbf{z} = [z_1 \quad z_2 \quad z_3]^T = [x_1 - x_{1d} \quad x_2 \quad g - \frac{C}{m} \left(\frac{x_3}{x_1} \right)^2]^T$$

che corrispondono alla differenza tra posizione verticale attuale e desiderata della sfera, la sua velocità e la sua *accelerazione*, e come uscita $y = z_1$ il sistema è riconducibile ad una forma canonica la cui ultima “riga” è:

$$\dot{z}_3 = \ddot{y} = f_1(\mathbf{x}) + b_1(\mathbf{x})u$$

nella quale:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{2C x_2 x_3^2}{m x_1^3} - \frac{2C x_3 \left(\frac{2C x_2 x_3}{L_1 x_1^2} - \frac{R x_3}{L_1} \right)}{m x_1^2} \\ b_1 &= -\frac{2C x_3}{m L_1 x_1^2} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Feedback Linearization (2)

che può essere trasformata in $\ddot{y} = v$ tramite la legge di controllo $u = b_1^{-1}(v - f_1)$, cioè:

$$u = -\frac{m L_1 x_1^2}{2 C x_3} \left(v - \frac{2 C x_2 x_3^2}{m x_1^3} + \frac{2 C x_3 \left(\frac{2 C x_2 x_3}{L_1 x_1^2} - \frac{R x_3}{L_1} \right)}{m x_1^2} \right)$$

o anche in forma più compatta:

$$u = -\frac{v m L_1 x_1^2}{2 C x_3} + R x_3 - \frac{2 C x_2 x_3}{x_1^2} + \frac{L_1 x_2 x_3}{x_1}$$

Si noti che imporre una condizione di regime $y = 0$, che corrisponde anche a portare nell'origine il vettore di stato \mathbf{z} , equivale a portare il sistema originario nella condizione di equilibrio imposta dal set-point x_{1d} .

Note Pratiche

Come si può facilmente notare dall'equazione dinamica, l'annullarsi di x_1 non è ammissibile, soprattutto per una simulazione numerica durante la quale verrebbe richiesta una divisione per zero.

È quindi necessario che tale variabile si mantenga sempre positiva, per evitare che la simulazione si interrompa per singolarità numeriche. Ovviamente, in fase di messa a punto di un regolatore, quest'ultimo potrebbe non essere in grado di garantire la condizione $x_1 > 0$ durante tutti i transitori. In questo caso, il “sintomo” evidente della inefficienza del regolatore sarà l'arresto nella progressione del tempo di simulazione, la quale dovrà quindi essere interrotta manualmente e ripresa dopo aver modificato i parametri di controllo.

Compiti di Progetto (1)

1. **Controllo LQ:** realizzare simulazioni in ambiente Matlab/Simulink del sistema considerato con controllo di tipo LQ, progettato per l'approssimazione lineare definita da x_{1d} e con matrice di penalizzazione dello stato Q (3×3), scalare di penalizzazione dell'ingresso R e matrice di penalizzazione stato-ingresso N (3×1) a piacere. Verificare inoltre l'effetto di variazioni di tali matrici sulle prestazioni del controllore.

N.B.: si ricordi che essendo $u_e \neq 0$ nel punto di equilibrio, lo schema di controllo da implementare è quello della slide 6 nelle “Note Applicative” presentate a lezione.

2. **Controllo con Feedback Linearization:** implementare la legge di controllo linearizzante descritta alla sezione 1.3 e sfruttare l'ingresso fittizio v per realizzare un ulteriore anello di controllo per la regolazione in $y = 0$, utilizzando un semplice controllore lineare oppure un controllore Sliding Mode.

N.B.: si ricordi che $\ddot{y} = v$, pertanto una superficie di sliding idonea può essere:

$$S = \ddot{y} + 2\lambda\dot{y} + \lambda^2 y$$

in base alla quale la legge di controllo per l'ingresso fittizio v sarà del tipo:

$$v = (\ddot{y}_d) - 2\lambda\ddot{y} - \lambda^2\dot{y} - K\text{sign}(s)$$

Compiti di Progetto (2)

3. **Controllo con Reti Neurali:** una volta ottenute buone prestazioni per almeno uno dei due controllori richiesti ai punti precedenti, effettuare il training di una Rete Neurale con il metodo del Supervised Learning, acquisendo dati di training con uno dei due modelli ottenuti in precedenza al quale sia applicata una sollecitazione casuale sul set-point. Verificare l'effetto di modifiche al numero di neuroni della rete o ai dati di training sulle prestazioni del controllore.

N.B.: è suggeribile utilizzare come ingressi della rete sia i valori di set-point degli stati (almeno x_{1d} e x_{3d} , ricordando sempre che quest'ultimo è funzione del primo) che quelli attuali (totale: almeno 5 input).

4. **Controllo con Logica Fuzzy:** una possibile strategia di progetto per un controllore Fuzzy, potrebbe essere quella del Fuzzy Gain Scheduling, che prevede di sfruttare tecniche di progetto per controllori lineari (es. LQ) per ottenere i parametri di alcuni regolatori validi per rispettive approssimazioni lineari con diversi valori di x_{1d} (e quindi x_{3d}). Questi parametri possono essere combinati in un sistema Fuzzy di tipo Sugeno, con regole del tipo:

IF x_1 is $x_{1d,i}$ **THEN** $u = \mathbf{K}_i(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}) + u_{d,i}$

N.B.: si noti che nel Fuzzy Logic Toolbox di Matlab, i sistemi Sugeno hanno funzioni di output del tipo:

$$\text{out} = a \cdot \text{in1} + b \cdot \text{in2} + \dots + c$$

Pertanto, per implementare i vari regolatori lineari, sarà necessario che il sistema Fuzzy abbia come ingressi tutti gli elementi di \mathbf{x}_d e di \mathbf{x} e che i parametri $a, b \dots$ siano determinati correttamente in base agli elementi delle varie matrici \mathbf{K}_i .

Compiti di Progetto (3)

5. **ESPERIMENTI COMPARATIVI:** verificare le prestazioni e la robustezza di tutti i sistemi di controllo progettati, rispetto a variazioni del 10 % sul set-point, applicando un'onda quadra additiva al set-point originario (con frequenza da fissare in funzione del tempo di assestamento tipico del sistema, in modo da permettere al sistema di riportarsi sempre sul set-point), e sui parametri del modello.
6. **Progetto dello schema di diagnosi.** Realizzare il filtro di Kalman che permette di effettuare la diagnosi dei sensori di uscita del MAGLEV, ovvero che sia in grado di rilevare guasti di tipo a gradino additivi sulle variabili di stato di posizione, velocità e di corrente.

Parametri Numerici da Utilizzare

Dato il numero di matricola dello studente con sei cifre $m_1 m_2 m_3 m_4 m_5 m_6$, fissare i parametri del modello come segue (oltre a $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$):

- Massa della sfera: $m = 0.0m_6 \text{ Kg}$ (se $m_6 = 0$, fissare $m = 0.05 \text{ Kg}$)
- Resistenza elettrica: $R = m_1 m_2 \Omega$ (se m_1 e/o m_2 sono $= 0$, sostituirla/e con la/e cifra/e immediatamente successiva/e)
- Induttanza nominale: $L_1 = 0.m_5 \text{ H}$ (se $m_5 = 0$, fissare $L_1 = 0.4 \text{ H}$)
- Costante della forza elettromagnetica: $C = 0.000m_5 m_6 \text{ Nm}^2 \text{ A}^2$ (se m_5 e/o m_6 sono $= 0$, sostituirla/e con la/e cifra/e immediatamente precedente/i)

Indipendentemente da questi parametri invece, fissare:

- Condizioni iniziali: $\mathbf{x}_0 = [x_{10} \ x_{20} \ x_{30}]^T = [0.1 \ 0 \ 0.2]$
- Set-point: $\mathbf{x}_d = [x_{1d} \ x_{2d} \ x_{3d}]^T = [0.05 \ 0 \ 0.05\sqrt{\frac{gm}{C}}]$